# Οι εξισώσεις $z^{\nu}=|z|$ και $z^{\nu}=1$ είναι ισοδύναμες

Ένα από τα κλασσικά παραδείγματα στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου με αντιρρήσεις ως προς τον τρόπο επίλυσης ( με το ν φυσικός μη μηδενικός).

## Παράδειγμα

Αν $z\in C$ να λυθεί η εξίσωση $z^3=|z|$

Μια προσέγγιση είναι η εξής:

Παρατηρούμε ότι για $z=0$ ισχύει ενώ για $z\neq 0 \Rightarrow |z^3|=||z|| \Leftrightarrow |z^3|=|z| \Leftrightarrow |z^2|=1 \Leftrightarrow |z|=1$. Έτσι επιστρέφοντας στην αρχική καλούμαστε να λύσουμε την εξίσωση $z^3=1$ η οποία δίνει ως λύσεις τις κυβικές ρίζες της μονάδας $z_1=1$ $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ η $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Υπάρχει η άποψη ότι το πέρασμα από την $z^3=|z|$ στην $|z^3|=|z|$ δεν είναι σωστό και μάλιστα προτείνεται η λύση να τεθεί $z=x+yi$.Είναι όμως έτσι;

Η εξίσωση $z^3=|z|$ ψάχνει τους μιγαδικούς οι οποίοι στην τρίτη τους δύναμη είναι ίσοι με το μέτρο τους. Το πέρασμα στην $|z|=1$αποκαλύπτει με τι πρέπει να είναι ίσο αυτό το μέτρο.

Σαφώς την (Ε) $|z|=1$ την επαληθεύουν και άλλοι άπειροι μιγαδικοί που απεικονίζονται στον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο. Ουσιαστικά από την δεξαμενή των μιγαδικών που έχουν μέτρο 1 εντοπίζουμε εκείνους που μπορούν επιπλέον να έχουν και $z^3=|z|=1$. Άρα κάθε λύση της $z^3=|z|$ πρέπει να έχει υποχρεωτικά μέτρο ίσο με 1.Ετσι καταλήγουμε να λύσουμε την $z^3=1$.

Αν μάλιστα το σκεφτούμε γεωμετρικά βρίσκουμε πως πρέπει να είναι το διάνυσμα ενός μιγαδικού λύση της (Ε) $z^3=|z|$.

Με λίγη χρήση της τριγωνομετρικής μορφής (εκτός ύλης για την Γ΄ Λυκείου) καταλαβαίνουμε ότι ο μιγαδικός που αναζητούμε έχει μέτρο $|z|\cdot|z|\cdot|z|=|z|^3$ και εφόσον αυτός είναι ο $|z|$ πρέπει όπως πριν να ισχύει αναγκαστικά $|z|=1$.

Επίσης η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα αυτό με τον άξονα Οx πρέπει να είναι τέτοια ώστε να κάνει τον $z^3$ να απεικονιστεί στο (1,0).

Άρα αν η γωνιά αυτή είναι θ του $z^3$ είναι $3\cdot\theta$ (De Moivre) οπότε πρέπει $3\cdot\theta=2\kappa\pi \Rightarrow \theta=\kappa\frac{2\pi}{3}$ με κ ακέραιο που δίνει την $\theta\in[0,2\pi)$ άρα προκύπτει ότι

$\theta = 0$ ή $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ή $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Τα διανύσματα λοιπόν αυτά με μέτρο 1 και αυτές τις γωνιές αντιστοιχούν στις λύσεις της (Ε) $z^3 = 1$.

Έτσι μπορεί κάποιος να χειριστεί και (Ε) της μορφής $f(z, \bar{z}) = 0$ όπως π.χ. $z^3 = \left(\bar{z}\right)^5$.

Γιάννης Ανδρεάδης