Ολοκληρώματα και φράγματα

Είναι γνωστό ότι η συνεχής συνάρτηση μέσω ενός κλειστού διαστήματος δημιουργεί ένα κλειστό διάστημα τιμών.

Το περίφημο θεώρημα μέγιστου ελάχιστου $f:[a,b]\to[m,M]$ όπου m,M είναι το ολικό μέγιστο και ελάχιστο της f στο $[a,b]$.

Η σχέση αυτή γράφεται $m \le f(x) \le M$ σε όλο το $[a,b]$ και αν αφήσουμε την περίπτωση της σταθερής συνάρτησης το = δεν ισχύει για κάθε x.

Έτσι ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στο $m\cdot(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M\cdot(b-a)$.

Είναι λίγο πολύ η βάση για την ιδέα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού λογισμού.

Καταλήγει εύκολα στο $m < \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} < M$ και κατόπιν το Θ.Ε.Τ.

Αναδεικνύει την ύπαρξη αριθμού ξ∈(a,b)ώστε $f(\xi) = \dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{b-a}$.

Η γεωμετρία πίσω από αυτά άκρως ενδιαφέρουσα καθώς ο αριθμός $f(\xi)$.

Είναι το ύψος ενός ορθογωνίου με βάση το $[a,b]$ του οποίου το εμβαδό είναι ίσο με το εμβαδό του χωρίου που εκφράζει το $\int_a^b f(x)dx$.

Η σχέση πάντως αυτή χρησιμοποιείται για να αποδείξει διπλές ανισώσεις για το ολοκλήρωμα καθώς δείχνει 2 φράγματα τους αριθμούς $m\cdot(b-a)$και$M\cdot(b-a)$.

Και πάλι η εικόνα καθαρή αφού το εμβαδό του ολοκληρώματος είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό ορθογωνίου με βάση το$[a,b]$ και ύψος το ολικό ελάχιστο της f ενώ μένει μικρότερο από το εμβαδό του ορθογωνίου με βάση το $[a,b]$ και ύψος το ολικό μέγιστο της f .

Ένα σημείο θέλει προσοχή…τα φράγματα αυτά γίνονται «καλυτέρα» η «χειροτέρα» ανάλογα με την μονοτονία της συνάρτησης!!

Ας δούμε ένα παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ με την $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$

Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ ενώ έχει στο 1 ολικό μέγιστο το $\dfrac{1}{e}$.

Αν τώρα κάποιος ασχοληθεί με το $\int_0^2 f(x)dx$ μπορεί να:

$\left[0,1\right] \to \left[f(0), f(1)\right] = \left[0, \frac{1}{e}\right]$ και $\left[1,2\right] \to \left[f(2), f(1)\right] = \left[\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e}\right]$.

Έτσι το σύνολο τιμών της $f(x)$ στο $\left[0,2\right]$ είναι το $\left[0, \frac{1}{e}\right] \cup \left[\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e}\right] = \left[0, \frac{1}{e}\right]$.

Οπότε η σχέση $0 \le f(x) \le \frac{1}{e} \Rightarrow 0 < \int_0^2 f(x)dx < \frac{1}{e} \cdot \left(2-0\right)$.

Αν όμως το δούμε τμηματικά τότε:

$0 \le f(x) \le \frac{1}{e} \Rightarrow 0 < \int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{e}$

$\frac{2}{e^2} \le f(x) \le \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{2}{e^2} \cdot \left(2-1\right) < \int_1^2 f(x)dx < \frac{1}{e} \cdot \left(2-1\right)$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $\frac{2}{e^2} < \int_0^2 f(x)dx < \frac{1}{e}$!!

Είναι φανερό ότι το αριστερό φράγμα του ολοκληρώματος είναι «καλύτερο».

Το εμβαδό του χωριού που εκφράζει το $\int_0^2 f(x)dx$ δεν είναι απλά κάποιος θετικός αριθμός αλλά ξεπερνά τον $\frac{2}{e^2}$.

Πάντα βεβαία η προσέγγιση έχει να κάνει με το ζητούμενο.

Γιάννης Ανδρεάδης