Μεγιστοποίηση μέσα από το τριώνυμο

Μια από τις πιο όμορφες εφαρμογές του τριωνύμου στη φυσική είναι η μεγιστοποίηση κάποιου μεγέθους μέσα από αυτό.

Η ιδέα απλή και βασίζεται στη λογική επίλυσης του παρακάτω μαθηματικού προβλήματος που κάποτε υπήρχε σαν εφαρμογή στο βιβλίο άλγεβρας της Α΄ λυκείου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 – Η μεγιστοποίηση στην άλγεβρα της Α΄ λυκείου

Από όλα τα παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο, να βρείτε εκείνο με το μέγιστο εμβαδό.

Έστω S η περίμετρος ενός παραλληλόγραμμου διαστάσεων α x β. Γνωρίζουμε ότι $S = 2a + 2\beta (1)$. Η συνάρτηση του εμβαδού είναι: $E = a \cdot \beta$ (2). Προσπαθούμε να γράψουμε το εμβαδό συναρτήσει μιας μόνο μεταβλητής του α ή του β. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$S = 2a + 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{S}{2} - a \quad (3)$$

$$E = a \cdot \beta \xrightarrow{(3)} E = a \cdot \left(\frac{S}{2} - a \right) \Leftrightarrow$$

$$E = a \cdot \frac{S}{2} - a^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a^2 - a \cdot \frac{S}{2} + E = 0} \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα τριώνυμο το οποίο θέλουμε να έχει πραγματικές λύσεις ως προς α. Άρα:

$$\Delta \geq 0 \xrightarrow{\beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma \geq 0} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{S}{2} \right)^2 - 4 \cdot E \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$E \leq \frac{S^2}{16} \quad (5)$$

Από τη σχέση (4) παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι $E_{\max} = \frac{S^2}{16}$ και την τιμή αυτή την έχουμε για Δ=0 δηλαδή όταν το τριώνυμο (4) έχει μια διπλή ρίζα που θα είναι η:

$$a = -\frac{-\frac{S}{2}}{2} = \frac{S}{4} \Leftrightarrow$$

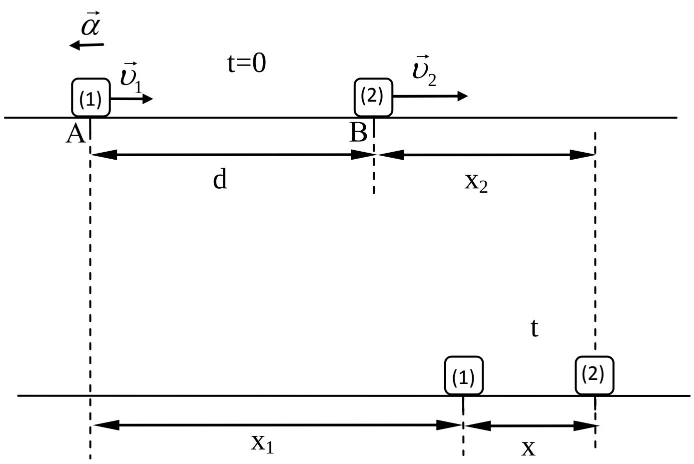
$$S = 4a \Leftrightarrow 2a + 2\beta = 4a \Leftrightarrow$$

$$\boxed{a = \beta}$$

Δηλαδή από ***όλα τα παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο, μέγιστο εμβαδό έχει το τετράγωνο .***

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 – *Φυσική Α΄*

Στο σχήμα που ακο0λουθεί τη χρονική στιγμή t = 0 τα οχήματα (1) και (2) βρίσκονται στα Α, Β τα οποία απέχουν απόσταση d=100 m. Το (2) κινείται ομαλά με ταχύτητα μέτρου υ_2= 10 m/s ενώ το (1) έχει ταχύτητα αρχική ταχύτητα υ_0= 20 m/s και κινείται με επιβράδυνση μέτρου 2 m/s^2. Πόση είναι η ελάχιστη απόσταση x στην οποία θα πλησιάσουν τα δύο οχήματα;



Τα σώματα εκτελούν κινήσεις που περιγράφονται από τις από τις παρακάτω εξισώσεις.

Μαθηματική λύση

Σώμα (1)

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - \alpha \cdot t \qquad (1)$$

$$x_1 = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 \quad (2)$$

Σώμα (2)

$$\upsilon_2 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta} \quad (3)$$

$$x_2 = \upsilon_2 \cdot t \qquad (4)$$

Η συνάρτηση που δίνει την μεταξύ τους απόσταση x, προκύπτει από τη σχέση:

$$x_1 + x = d + x_2 \quad (5)$$

$$20t - t^2 + x = 100 + 10t \Leftrightarrow$$

$$\boxed{t^2 - 10t + (100 - x) = 0} \quad (6)$$

Η σχέση (6) αποτελεί ένα τριώνυμο ως προς t το οποίο θέλουμε να έχει πραγματικές λύσεις. Άρα:

$$\beta^2 - 4\alpha \cdot \gamma \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$100 - 4 \cdot \left(100 - x\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$100 - 400 + 4 \cdot x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \geq 75m$$

‘‘Φυσική’’ λύση

Όσο η ταχύτητα του σώματος -1 είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του σώματος -2, τα σώματα πλησιάζουν, δηλαδή η μεταξύ τους απόσταση ελαττώνεται. Κάποια στιγμή οι ταχύτητές τους εξισώνονται και αμέσως μετά γίνεται $υ_1<υ_2$, δηλαδή τα σώματα αρχίζουν να απομακρύνονται.

Άρα την ελάχιστη απόσταση θα την έχουν τα δύο σώματα όταν οι ταχύτητές τους γίνουν ίσες. Από τις σχέσεις (1) και (3) θα έχουμε:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \Leftrightarrow$$
$$20 - 2 \cdot t = 10 \Leftrightarrow$$
$$2 \cdot t = 10 \Leftrightarrow$$
$$t = 5 \sec$$

Στο χρόνο αυτό το κινητό -1 θα έχει διανύσει διάστημα:	$x_1 = 20 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 \Leftrightarrow$ $x_1 = 75 m$
Ενώ Το κινητό -2 θα έχει διανύσει διάστημα:	$x_2 = 10 \cdot 5 = 50 m$

Άρα η ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους θα δίνεται από τη σχέση (5) δηλαδή :

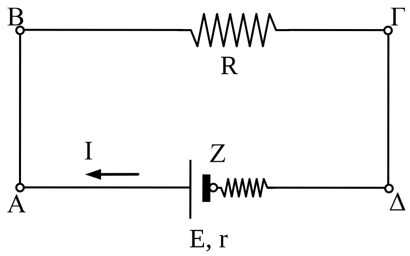
$$x_1 + x = d + x_2 \Leftrightarrow$$
$$75 + x = 100 + 50 \Leftrightarrow$$
$$x = 75 \ m$$

Από ότι μπορείς εύκολα να καταλάβεις λοιπόν, ο κάθε τρόπος έχει τη δική του *ομορφιά!!*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 – *Φυσική Β΄- Ηλεκτρισμός*

Θεώρημα Μέγιστης Ισχύος

Ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης E,r και αντίσταση R. Για ποια τιμή της αντίστασης R, η ισχύς που καταναλώνεται σε αυτή είναι μέγιστη;



Από την επίλυση του κυκλώματος γνωρίζουμε ότι η ένταση του ρεύματος δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{E}{R + r} \quad (1)$$

Η ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης R δίνεται από τη σχέση:

$$P_R = I^2 \cdot R = \frac{E^2}{(R + r)^2} \cdot R \quad (2)$$

Στη σχέση (2) παρατηρούμε ότι αύξηση της αντίστασης R, αυξάνει και τον αριθμητή και τον παρονομαστή άρα είναι δύσκολο να καταλάβουμε με μια ματιά τι παθαίνει το κλάσμα.

1^{ος} τρόπος

Για καλή μας τύχη όμως διακρίνουμε ένα τριώνυμο ως προς R.

(2) …*πράξεις*…*πράξεις*…*πράξεις*

$$P_R \cdot R^2 + (2rP_R - E^2)\cdot R + P_R \cdot r^2 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \ldots$$

$$E^2 - 4rP_R \geq 0$$

$$P_R \leq \frac{E^2}{4r} \;\; \acute{\alpha}\rho\alpha \;\; P_{R\max} = \frac{E^2}{4r} \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; \Delta = 0$$

$$\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; R = \left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)\ldots$$

$$R = \frac{E^2 - 2rP_R}{2P_R} = \frac{E^2 - 2\cancel{r}\dfrac{E^2}{4\cancel{r}}}{2\dfrac{E^2}{4r}} = r$$

2^{ος} τρόπος *–ενεργειακά*

Στο κύκλωμα, την ισχύ που δίνει η πηγή Ε, την καταναλώνουν οι αντιστάτες r και R. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε:

$$P_E = P_R + P_r \Leftrightarrow$$

$$E \cdot I = P_R + I^2 \cdot R \Leftrightarrow$$

$$I^2 \cdot R - E \cdot I + P_R = 0 \Leftrightarrow$$

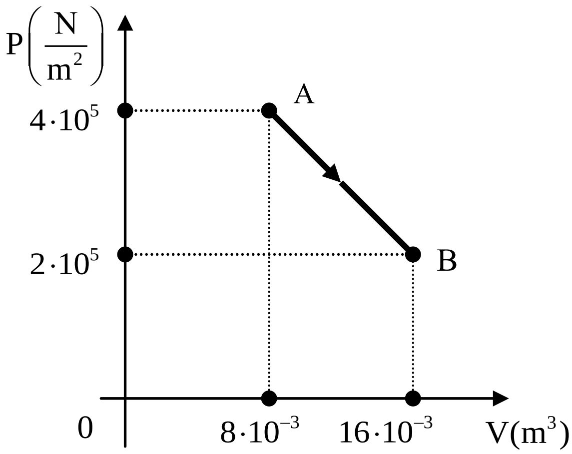
$$\Delta \geq 0 \ldots P_{R\max} = \frac{E^2}{4R} \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; \Delta = 0$$

$$\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$$

$$I = \frac{E}{2R} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha\pi\acute{o} \;\; (1) I = \frac{E}{R + r}$$

$$\boxed{R = r}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4 – *Φυσική Β΄- Θερμοδυναμική*



Στο διπλανό διάγραμμα παριστάνεται η αντιστρεπτή μεταβολή στην οποία υποβάλλονται $n = \frac{4}{R}\,\mathrm{mol}$ *ιδανικού αερίου (όπου* R *η παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων σε* $\frac{J}{mol\cdot K}$ *).*

α) Να αποδείξετε ότι η θερμοκρασία του αερίου στην αρχική και στην τελική κατάσταση είναι η ίδια ($T_A = T_B$ *).*

β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη θερμοκρασία που αποκτά το αέριο κατά τη μετάβαση του από την κατάσταση A *στην κατάσταση* B*. Δίνεται ότι η εξίσωση της μεταβολής είναι:* $P = -\frac{1}{4}10^8 V + 6\cdot 10^5$ *(1).*

Από καταστατική γνωρίζουμε ότι:

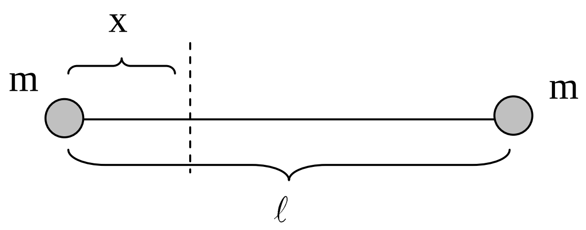
$$P\cdot V = n\cdot R\cdot T \Leftrightarrow$$
$$P\cdot V = \frac{4}{R}\cdot R\cdot T \Leftrightarrow$$
$$P\cdot V = 4\cdot T \Leftrightarrow$$
$$P = \frac{4\cdot T}{V} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{4\cdot T}{V} = -\frac{1}{4}10^8 V + 6\cdot 10^5 \Leftrightarrow \ldots$$
$$10^8 V^2 - 24\cdot 10^5 V + 16T = 0 \Leftrightarrow \ldots$$
$$\Delta \geq 0 \ldots \Leftrightarrow \left(24\cdot 10^5\right)^2 - 4\cdot 10^8\cdot 4T \geq 0 \Leftrightarrow \ldots$$
$$T_{max} = 900\,K$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5 – *Φυσική Γ΄-Μηχανική στερεού*

Σύστημα αποτελείται από δύο ίδιες σημειακές μάζες m που συνδέονται με αβαρή ράβδο μήκους ℓ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ως προς ποιον άξονα περιστροφής κάθετο στη ράβδο, η ροπή αδράνειας-I του συστήματος γίνεται ελάχιστη;

$$I = m \cdot x^2 + m \cdot \left(\ell - x\right)^2 \Leftrightarrow ...\pi\rho\acute{\alpha}\xi\varepsilon\iota\varsigma$$

$$2m \cdot x^2 - 2m\ell \cdot x + \left(m\ell^2 - I\right) = 0$$

$$\Delta \geq 0 ... I \geq \frac{m\ell^2}{2} ...$$

$$I_{\max} = \frac{m\ell^2}{2} \;\; \acute{o}\tau\alpha\nu \;\; \Delta = 0 \;\; \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$$

$$x = \left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\ell}{2}}$$

Κάπου εδώ βέβαια στην Γ΄ λυκείου οι γνώσεις σου στα μαθηματικά έχουν εμπλουτιστεί και με την έννοια της παραγώγου άρα έχεις ήδη μάθει και άλλους τρόπους για την εύρεση των ακρότατων μιας συνάρτησης.