Οι μεταβολές

Ο χρόνος περνάει, η θερμοκρασία πέφτει, ο πληθυσμός αυξάνει, η ενέργεια τελειώνει, η ψυχολογία αλλάζει. Οι μεταβολές καθρεφτίζουν την ίδια την πορεία της ζωής και του κόσμου. Η επιστήμη των Μαθηματικών και της Φυσικής και όχι μόνο, εξελίσσεται μελετώντας τις σε μεγέθη, ποσότητες, καταστάσεις.

Έστω πώς μία ποσότητα N παίρνει τιμές καλά ορισμένες και πως από μια τιμή N_1 παίρνει την τιμή N_2. Τότε η διαφορά τελική τιμή πλην αρχική τιμή συμβολίζεται $\Delta\mathrm{N} = \mathrm{N}_2 - \mathrm{N}_1$ και δείχνει την μεταβολή στις τιμές της ποσότητας N. Έτσι αν η θερμοκρασία θ από $\theta_1 = 10$ βαθμούς γίνει $\theta_2 = 16$ βαθμούς τότε με $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 16 - 10 = 6$ βαθμούς συμβολίζουμε την μεταβολή (αύξηση) της ενώ αν η πίεση P γίνει από $P_1 = 2,3$ μονάδες $P_2 = 2$ μονάδες τότε με $\Delta P = P_2 - P_1 = -0,3$ μονάδες συμβολίζουμε την μεταβολή(μείωση) της πίεσης.

Η σχετική μεταβολή

Τι θα γίνονταν όμως αν οι τιμές της θερμοκρασίας επηρέαζαν τις τιμές της πίεσης; Τότε θα είχε αξία να γνωρίζουμε την μεταβολή της πίεσης **σε σχέση** με την μεταβολή της θερμοκρασίας!!

Γενικά έστω πως 2 ποσότητες X και Y συνδέονται δηλ. οι τιμές της ποσότητας Y προκύπτουν από τιμές της X. Αυτό συνήθως εκφράζεται με μια μαθηματική σχέση (ας δεχθούμε ότι έχει τις προδιαγραφές της συνάρτησης) και γράφουμε $Y = F(X)$. Η ποσότητα X παίρνει την τιμή $X = x_1$ και αυτό κάνει την ποσότητα Y να πάρει την τιμή $y_1 = F(x_1)$.Αν τώρα η ποσότητα X γίνει $X = x_2$ οπότε και η ποσότητα Y γίνει $Y = F(x_2) = y_2$ τότε μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την μεταβολή των Y **σε σχέση** με την μεταβολή των X.

Σχηματίζουμε λοιπόν τον **ΛΟΓΟ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ** δηλ.

$$\frac{\Delta \mathrm{Y}}{\Delta \mathrm{X}} = \frac{\Delta F(X)}{\Delta \mathrm{X}} = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Οι **σχετικές μεταβολές** είναι ως επί το πλείστον πιο ενδιαφέρουσες.

Ας μιλήσουμε λοιπόν για αυτές και ας κάνουμε τα πράγματα πιο συγκεκριμένα.

Η μέση σχετική μεταβολή

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο η μια ποσότητα θα είναι ο χρόνος t. Ο χρόνος είναι πιο κατανοητός, συνεχώς αυξάνει και ας φανταστούμε πως μπορούμε να τον «παγώνουμε» και να τον «ξεπαγώνουμε» όπως το play και το pause σε ένα video.

Έστω λοιπόν πληθυσμός βακτηρίων N (σε εκατομ. βακτήρια) που αλλάζει καθώς περνάει ο χρόνος. Υπάρχει λοιπόν μια συνάρτηση του χρόνου $N(t) = N$ που σε κάθε τιμή του χρόνου t(min) υπολογίζει τον πληθυσμό N.

Θέλουμε να βρούμε την μεταβολή του πληθυσμού N ως προς τον χρόνο t στο διάστημα $[5,14]$ min. «Παγώνουμε» τον χρόνο στο t=5 και μετράμε $N(5) = 1$.

«Ξεπαγώνουμε» τον χρόνο αφήνουμε να κυλήσουν 9 min και ακριβώς στο t=14 «παγώνουμε» και μετράμε $N(14) = 4$.

Το κλάσμα $\frac{\Delta \mathrm{N}}{\Delta t}=\frac{\Delta \mathrm{N}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{N}(14)-\mathrm{N}(5)}{14-5}=\frac{4-1}{14-5}=\frac{1}{3}$ εκατομ. βακτ. ανά λεπτό λέγεται **μέση μεταβολή, μέση ταχύτητα, μέσος ρυθμός μεταβολής** του πληθυσμού N(t) **ως προς τον χρόνο** στο **διάστημα** $\left[5,14\right]$**.**

Τα Μαθηματικά καθρεφτίζουν αυτό το αποτέλεσμα στην κλίση του ευθ. τμήματος με άκρα Α(5,1) και Β(14,4).
Η μέση μεταβολή είναι **αριθμός** και εξαρτάται από το διάστημα που εξετάζουμε.
Τι δείχνει όμως το αποτέλεσμα;

Ότι σε **αυτά** τα 9 λεπτά ο πληθυσμός αυξήθηκε **κατά μέσο όρο** $\frac{1}{3}$ εκατ. βακτ. ανά λεπτό δηλ.

... δεν μπορούμε να ξέρουμε αν μόνο αυξάνονταν ή ίσως αυξομειώνονταν. Ακόμη όμως και αν αυξομειώνονταν μπορούμε να μαντέψουμε ότι οι αυξήσεις του πληθυσμού «κερδίζουν» τις μειώσεις του. Μπορούμε μάλιστα να σκεφτούμε πως ότι λίγο πολύ και να έγινε στο [5,14], την συνολική μεταβολή του πληθυσμού θα μπορούσε να μας την δείξει και μια γραμμική συνάρτηση $\mathrm{N}(\mathrm{t})=\frac{1}{3}\mathrm{t}+\mathrm{k}$ που θα διέρχονται από τα Α,Β. Πόσο όμως μια τέτοια συνάρτηση είναι κοντά σε αυτό στη πραγματικότητα;
Υπάρχει άραγε τρόπος να γνωρίζουμε τι ακριβώς έγινε στο διάστημα $\left[5,14\right]$;

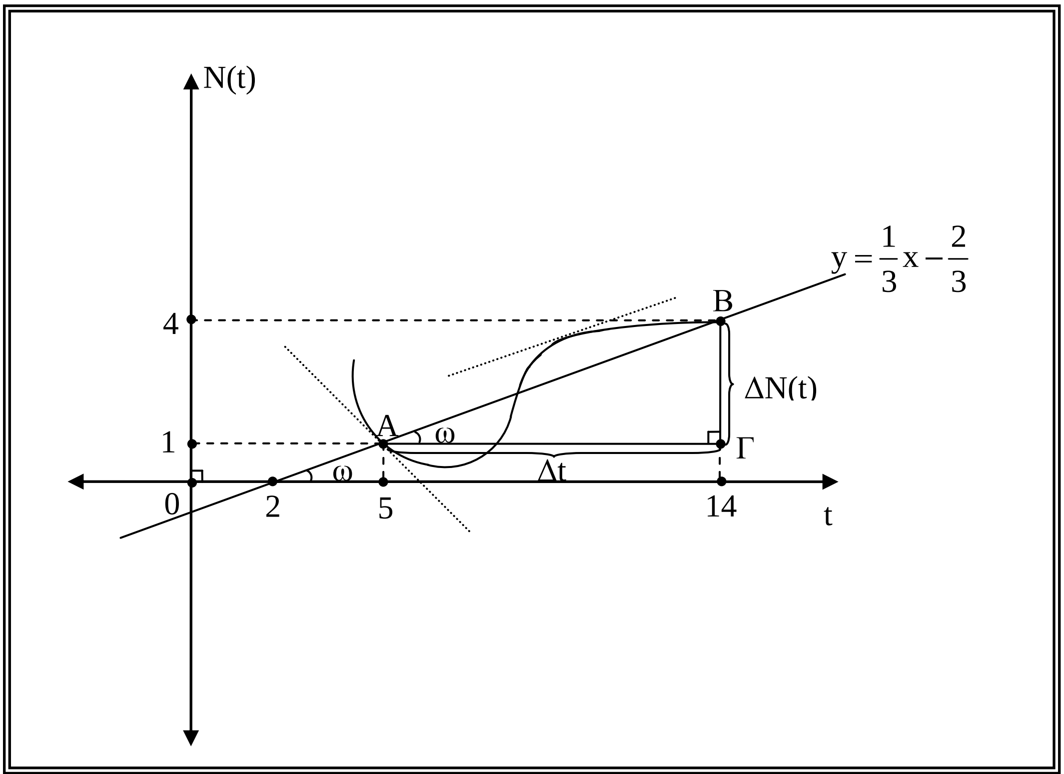
Η στιγμιαία σχετική μεταβολή

Η ιδέα δόθηκε από δυο εμβληματικές φυσιογνωμίες των θετικών επιστημών τους Newton και Leibniz.
Ας πάμε λοιπόν στο t=5 όπου βρήκαμε ότι N(5)=1… και ας «ξεπαγώσουμε» τον χρόνο μόνο για μια «στιγμή» ... ας υποθέσουμε ότι πέρασε χρόνος περίπου ίσος με h= 0,00…01 του λεπτού (που είναι σαν να μην πέρασε).
Ποια είναι η μεταβολή του πληθυσμού N(t) ως προς αυτή την απειροελάχιστη μεταβολή του χρόνου στο t=5;

Το κλάσμα της μέσης μεταβολής επιστρατεύεται… $\frac{N(5+h)-N(5)}{h}$ όμως οι συνθήκες είναι ξεχωριστές καθώς το h τείνει στο 0. Τα Μαθηματικά επινοούν θεωρίες και απαντούν. Οι ακολουθίες το όριο η παράγωγος.

Υπό συνθήκες λοιπόν το $\frac{\Delta \mathrm{N}(t)}{\Delta t}$ όταν Δt τείνει στο 0 είναι περίπου ίσο με έναν **αριθμό** που λέγεται **στιγμιαία μεταβολή, στιγμιαία ταχύτητα , στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής** του πληθυσμού N(t) ως προς τον χρόνο στο t=5. Το σύμβολο του $\left.\frac{dN(t)}{dt}\right|_{t=5}$ και $N'(5)$.

Αν λοιπόν ο αριθμός αυτός είναι π.χ. $N'(5)=-2$ αυτό που καταλαβαίνουμε είναι ότι... **κοντά στο τέλος του 5-ου λεπτού ο πληθυσμός Ν έχει την ΤΑΣΗ να αλλάξει ανάποδα από τον χρόνο t δηλ. να μειωθεί και μάλιστα τόσο έντονα ώστε αν αυτή η τάση διαρκούσε για ένα λεπτό ο πληθυσμός θα μειώνονταν κατά 2 εκατ. Βακτήρια.**
Η στιγμιαία μεταβολή καθρεφτίζεται στην κλίση μιας ευθείας που εφάπτεται στο σκίτσο της συνάρτησης N(t) στο σημείο Α(5,1). Έτσι την μορφή μιας τέτοιας συνάρτησης την διαμορφώνουν ευθείες που «γαντζώνονται» πάνω της ως εφαπτόμενες.



Το σημαντικότερο όμως είναι πως κάτι που μεταβάλλεται μπορούμε να το χωρίσουμε σε μικροσκοπικά μέρη, να δούμε την στιγμιαία μεταβολή σε καθένα από αυτά και να βγάλουμε ένα **αθροιστικό συμπέρασμα!!**

O Lagrange, Το διαφορικό, Τα διανύσματα

Η μέση μεταβολή ταυτίζεται μια τουλάχιστον φορά με την στιγμιαία. Έτσι μεταξύ 5-ου και 14-ου λεπτού η στιγμιαία μεταβολή του πληθυσμού θα ήταν έστω και για μια φορά $\frac{1}{3}$ (Θ.Lagrange).

Από την άλλη το διαφορικό είναι μια ποσότητα που προσεγγίζει την μεταβολή ΔN(t)=N(14)-N(5)=4-1=3 λαμβάνοντας υπόψη την μεταβολή Δt=14-5 αλλά και την στιγμιαία μεταβολή στο t=5 ως εξής

$dN(t) = N'(5)\cdot \Delta t$ έχοντας ξεχωριστές εφαρμογές.

Τα διανύσματα μεταβάλλονται και αυτά. Έτσι ένα διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$ μπορεί να υποστεί μεταβολές στις συντεταγμένες του $\vec{b} = (x + \Delta\chi, y + \Delta y)$.Το ίδιο στρέφεται και αλλάζει μήκος. Η στιγμιαία μεταβολή είναι και εδώ παρούσα μόνο που τώρα την σκυτάλη αναλαμβάνει η μιγαδική ανάλυση.

Για το τέλος λίγα λόγια του G, Leibniz σε μια από τις πολλές φιλοσοφικές του αναζητήσεις... «δεν υπάρχει στα αλήθεια ευτυχισμένη ζωή ... υπάρχουν μόνο ευτυχισμένες στιγμές...».

Ο Διαφορικός λογισμός βασιλεύει.

ΓΙΑΝΝΗΣ ΑΝΔΡΕΑΔΗΣ