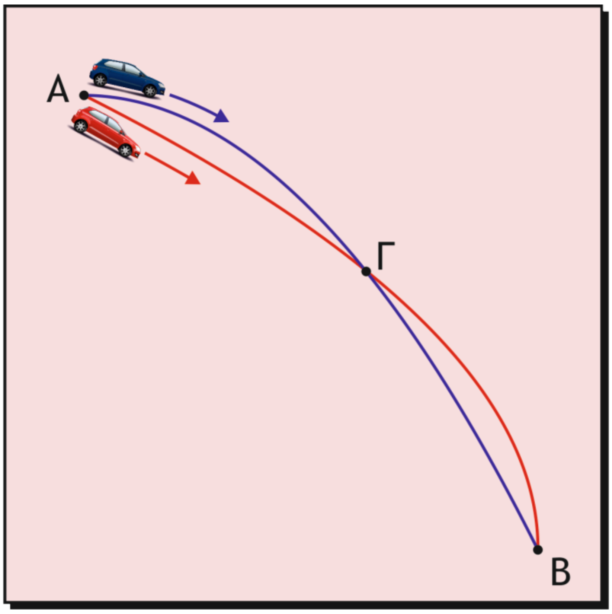
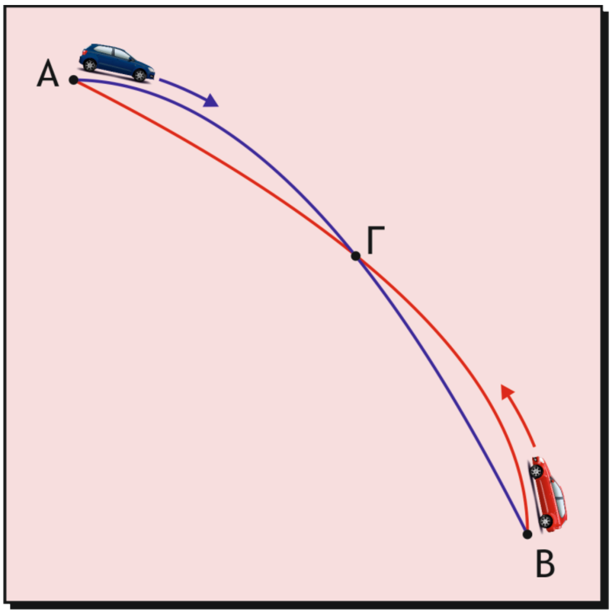
"Sorry, δεν είναι αυτό που νομίζεις…"

"...κάπου θα συναντηθούμε..."

Στο παρακάτω σχήμα το μπλε και το κόκκινο αυτοκίνητο ξεκινούν την ίδια στιγμή από το Α. Κινούνται ελεύθερα το καθένα στη δική του τροχιά. Πόσα είναι, συνολικά, τα πιθανά σημεία συνάντησής τους;



Στο παρακάτω σχήμα το μπλε αυτοκίνητο ξεκινά από το Α και την ίδια στιγμή το κόκκινο αυτοκίνητο ξεκινά από το Β. Τα αυτοκίνητα κινούνται ελεύθερα το καθένα στη δική του τροχιά. Πόσα είναι, συνολικά, τα πιθανά σημεία συνάντησής τους;



Τελικά, τα πιθανά σημεία συνάντησης αυτών των δύο αυτοκινήτων είναι 3; Τα Α, Β, Γ ή μήπως αυτό αλλάζει αν με κάποιον τρόπο η τροχιά του ενός δεσμεύει την τροχιά του άλλου;

Το μαθηματικό πρόβλημα

Έστω η συνάρτηση $f(x)=1-x^2,\ x\geq 0$.

(α) Να δείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη.
(β) Να οριστεί η αντίστροφη.
(γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των $C_f,\ C_{f^{-1}}$.

(α) Η f εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα, άρα είναι και $1-1$, δηλαδή είναι αντιστρέψιμη.

(β) Θέτουμε $y=f(x)$ και έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=1-x^2 \Leftrightarrow x^2=1-y \quad (1)$$

Πρέπει $1-y\geq 0\Leftrightarrow y\leq 1$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow |x|=\sqrt{1-y}\overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{1-y}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{1-y},\ y\leq 1.$$

Άρα είναι $f^{-1}(x)=\sqrt{1-x},\ x\leq 1$.

(γ) Είναι $A_f=[0,+\infty)$, $A_{f^{-1}}=(-\infty,1]$, οπότε $A_f\cap A_{f^{-1}}=[0,1]$.

<u>1ος τρόπος</u>

Τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} βρίσκονται από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases},\ \text{με}\ x\in[0,1]$$

από το οποίο προκύπτει η εξίσωση:

$$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow 1-x^2=\sqrt{1-x} \quad (2)$$

Πρέπει $1-x^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$, το οποίο πληρείται, διότι $x\in[0,1]$. Επομένως έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow \left(1-x^2\right)^2 = \left(\sqrt{1-x}\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{1} - 2x^2 + x^4 = \cancel{1} - x \Leftrightarrow$$

$$x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad ή \quad x = 1 \quad ή \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Η λύση $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ *απορρίπτεται διότι* $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \ldots$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} τέμνονται στα σημεία:

$$A(0,\ 1), \quad B(1,\ 0) \quad και \quad \Gamma\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Παρατηρούμε ότι μόνο το σημείο Γ ανήκει πάνω στην ευθεία $y = x \ldots$

2ος τρόπος

Αν $M(x,\ y)$ κοινό σημείο των C_f, $C_{f^{-1}}$, τότε $y = f(x)$ και $y = f^{-1}(x)$. Έτσι τα κοινά τους σημεία προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x^2 & (1) \\ x = 1 - y^2 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x = 1 - \left(1-x^2\right)^2 \Leftrightarrow x = \cancel{1} - \cancel{1} + 2x^2 - x^4 \Leftrightarrow$$

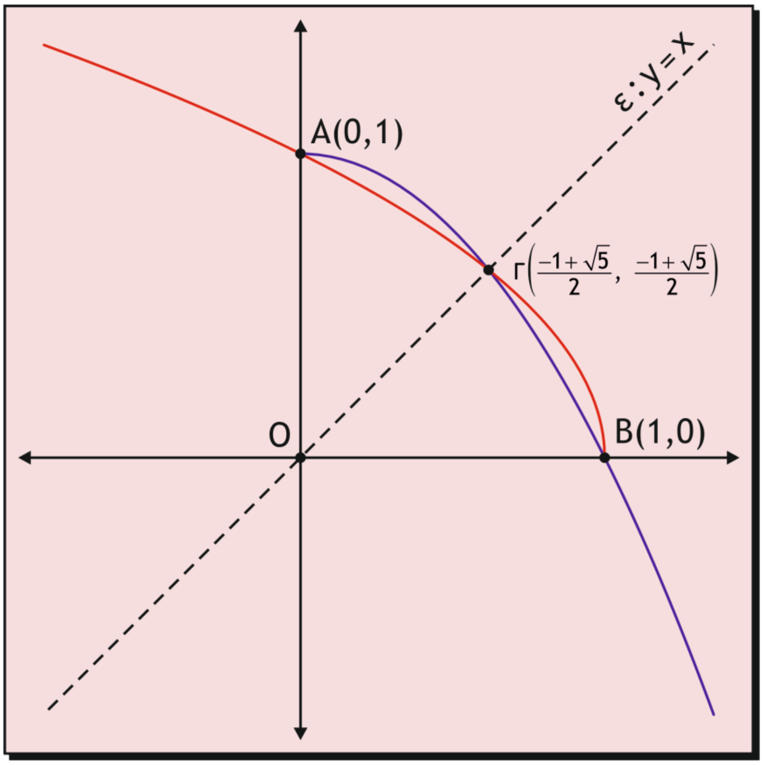
$$x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \quad ή \quad x = 1 \quad ή \quad x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Και πάλι διαπιστώνουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} τέμνονται στα σημεία:

$$A(0,\ 1), \quad B(1,\ 0) \quad και \quad \Gamma\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Μήπως όμως τα πράγματα δεν είναι έτσι όπως φαίνονται; Αν δούμε τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} αποτυπωμένες στο χαρτί, πράγματι φαίνονται να έχουν 3 κοινά σημεία, τα Α, Β και Γ. Όμως μπορούμε να ισχυριστούμε ότι όντως είναι κοινά αυτά τα σημεία; Ας παρακολουθήσουμε το επόμενο βίντεο:

Antistrofi.mp4

Παρατηρούμε π.χ. ότι αν στην f θέσουμε όπου x το 0 παίρνουμε αποτέλεσμα 1, δηλαδή το σημείο $A(0,1)\in C_f$. Τότε όμως, την ίδια στιγμή, στην f^{-1} υποχρεωτικά μπαίνει το 1 και δίνει αποτέλεσμα 0, δηλαδή το $A'(1,0)\in C_{f^{-1}}$. Διαπιστώνουμε λοιπόν σαφώς ότι τα σημεία $A(0,1)$ και $A'(1,0)$ δεν ταυτίζονται και αυτό συμβαίνει λόγω της δέσμευσης που διέπει εξ ορισμού τις συναρτήσεις f και f^{-1}. Δηλαδή δε γίνεται συγχρόνως να θέσουμε και στην f και στην f^{-1} όπου x το 0… Συνεπώς το μοναδικό κοινό σημείο που έχουν στην πραγματικότητα είναι το $\Gamma\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ διότι τότε:

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Δηλαδή όταν στην f θέσουμε όπου x το $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ δίνει αποτέλεσμα $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, οπότε την ίδια στιγμή μπαίνει στην f^{-1} το $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ και δίνει επίσης αποτέλεσμα $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Συνεπώς αυτή είναι η μοναδική περίπτωση όπου τα σημεία A και A' ταυτίζονται, όπως άλλωστε φαίνεται ξεκάθαρα και στο βίντεο που προηγήθηκε.

Ας δούμε όμως το ζήτημα και στο μιγαδικό επίπεδο.

Έστω οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}$ με $w = i\bar{z}$. Αν οι εικόνες $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z κινούνται πάνω στη γραμμή $C_1 : y = 1 - x^2$, $x \geq 0$, να βρείτε:

(α) Τη γραμμή C_2 πάνω στην οποία κινούνται οι εικόνες $N(w)$ των μιγαδικών αριθμών w.

(β) Την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$, καθώς και τους μιγαδικούς z και w των οποίων το μέτρο παίρνει την τιμή αυτή.

(α) Έστω $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, οι οποίοι απεικονίζονται στα σημεία $M(x,\ y)$ με $y = 1 - x^2$, $x \geq 0$.

Έστω $w = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, οι οποίοι απεικονίζονται στα σημεία $N(\alpha,\ \beta)$.

Είναι:

$$w = i\bar{z} \Leftrightarrow \alpha + \beta i = i(x - yi) \Leftrightarrow \alpha + \beta i = y + xi \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = y \\ \beta = x \end{cases}.$$

Τότε έχοντας $y = 1 - x^2$, $x \geq 0$, προκύπτει ότι:

$$\alpha = 1 - \beta^2,\ \beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 = 1 - \alpha,\ \alpha \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\beta = \sqrt{1 - \alpha},\ \alpha \leq 1.$$

Άρα οι εικόνες $N(w)$ των μιγαδικών αριθμών w κινούνται πάνω στη γραμμή $C_2 : y = \sqrt{1 - x}$, $x \leq 1$.

(β) Το $|z - w|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων $M(z)$ και $N(w)$ των μιγαδικών z και w στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτή η απόσταση καθορίζεται από τη θέση των M, N πάνω στις C_1 και C_2. Αυτή όμως η θέση δεν είναι ελεύθερη καθώς αν το M βρεθεί κάπου στη C_1 το N υποχρεώνεται να βρεθεί σε μια συγκεκριμένη θέση στη C_2, που υπαγορεύεται από τη δέσμευση που τους διέπει $w = i\bar{z}$. Έτσι:

$$|z - w| = |z - i\bar{z}| = |x + yi - i(x - yi)| =$$

$$|x + yi - xi - y| = |(x - y) + (y - x)i| =$$
$$\sqrt{(x - y)^2 + (y - x)^2} = \sqrt{2(x - y)^2} = \sqrt{2}\,|x - y| =$$

$$\sqrt{2}\,|x - (1 - x^2)| = \sqrt{2}\,|x - 1 + x^2| = \sqrt{2}\,|x^2 + x - 1|.$$

Έτσι η απόσταση των M, N καθρεφτίζεται στην ποικιλία των αποτελεσμάτων που δίνει η $|x^2 + x - 1|$, με $x \geq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |x^2 + x - 1|$, με $x \geq 0$.

Είναι $f(x) = |x^2 + x - 1| = \begin{cases} -x^2 - x + 1, & x \in \left[0,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ x^2 + x - 1, & x \in \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ +\infty\right) \end{cases}$.

Για $x \in \left[0,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ έχουμε: $f'(x) = -2x - 1$

Για $x \in \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ +\infty\right)$ έχουμε: $f'(x) = 2x + 1$

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα με το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f:

	$-\infty$ … $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ … 0	0 … $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ … $+\infty$
-2x-1	+	−	−	−
2x+1	−	+	+	+
f′(x)			−	+
f(x)			↘	↗

Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει:

$$\text{ολικό ελάχιστο στο } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ το } f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=0.$$

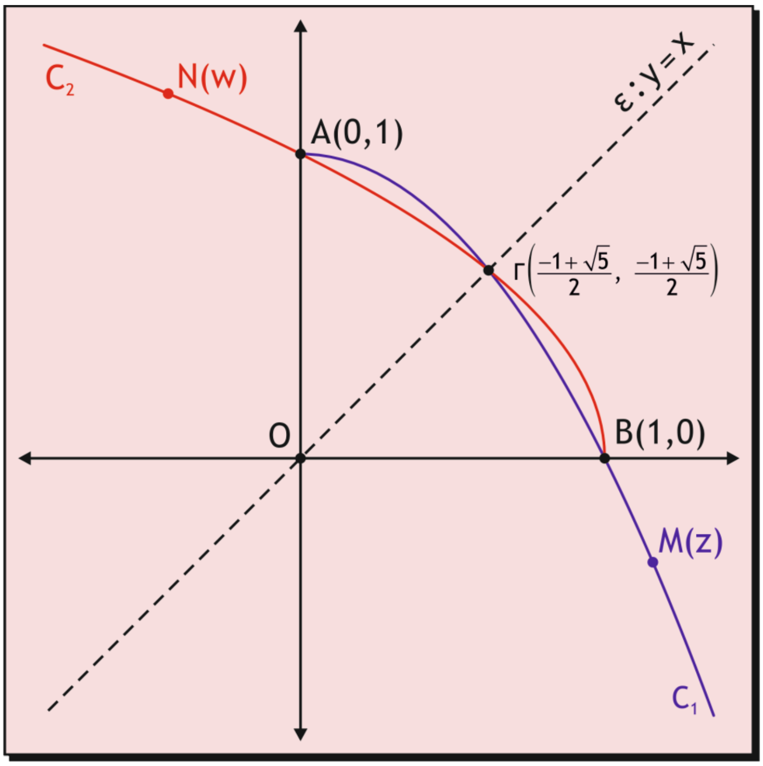
Επομένως η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ είναι 0 και η απόσταση των εικόνων M, N των μιγαδικών αριθμών z και w αντίστοιχα, γίνεται ελάχιστη όταν $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Τότε:

$$y=\sqrt{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Άρα οι μιγαδικοί z και w των οποίων το μέτρο παίρνει την ελάχιστη τιμή είναι:

$$z_0=x+yi=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}i \quad \text{και} \quad w_0=\alpha+\beta i=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}i,$$

δηλαδή συμπεραίνουμε ότι $z_0=w_0$.



Αυτό που αναδεικνύεται από την προσέγγιση των μιγαδικών είναι ότι η σχέση που τους συνδέει $w=i\bar{z}$ επιβάλλει στα N(w) να είναι πάντα συμμετρικά των

M(z) ως προς την ευθεία $\varepsilon : y = x$. Ότι ακριβώς δηλαδή επιβάλλει στα σημεία της $C_{f^{-1}}$ η σχέση με τα σημεία της C_f στο αρχικό πρόβλημα. Οι δύο γραφικές παραστάσεις δε "ζωγραφίζονται" ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Όποτε δηλαδή "τυπωθεί" το 1ο σημείο της C_f υποχρεώνεται να "τυπωθεί" σε συγκεκριμένη θέση το 1ο σημείο της $C_{f^{-1}}$.

Έτσι ζητήματα όπως το πλήθος των κοινών σημείων, η μέγιστη-ελάχιστη απόσταση σημείων ή ακόμη και το εμβαδόν χωρίου μεταξύ τους υποχρεούνται να λάβουν υπόψη τους αυτήν ακριβώς τη δέσμευση. Εκτός και αν κάποιος υποθέσει ότι πρόκειται για "παγωμένα σκίτσα", χωρίς παρελθόν. Τότε όμως το πρόβλημα είναι διαφορετικό, διότι ξεχνά τη σχέση $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ και τη σχέση $w = i\bar{z}$. Σ’ αυτήν την περίπτωση όμως το πρόβλημα πρέπει να διατυπωθεί διαφορετικά:

"Να βρείτε τα κοινά σημεία ανάμεσα στη C_f και την C_g μιας συνάρτησης $g(x)$ που έχει τον τύπο της f^{-1}".

Δεν πρόκειται για ένα απλό παιχνίδι με τις λέξεις, αλλά καθαρά για ένα άλλο πρόβλημα.

Γιάννης Ανδρεάδης
Ηλίας Ντεΐρμεντζίδης