Ομαλή κυκλική κίνηση: Μια…επιταχυνόμενη κίνηση!

Όλοι οι (διαβασμένοι) μαθητές της δευτέρας λυκείου που έχουν διδαχθεί κυκλική κίνηση, γνωρίζουν ασφαλώς την κεντρομόλο επιτάχυνση. Ακόμα κι αυτοί που δεν έχουν αφομοιώσει 100% την έννοια αυτή, μπορούν να θυμούνται -θαρρείς παπαγαλία- ότι *"η κεντρομόλος επιτάχυνση ευθύνεται για τη μεταβολή **μόνο** της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας και όχι του μέτρου της"*. Άλλωστε στην ομαλή κυκλική κίνηση το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας παραμένει σταθερό. Και κάπου εκεί κάποιοι απορούν: Πώς είναι δυνατόν ένα σώμα να έχει επιτάχυνση αλλά το μέτρο της ταχύτητας του να παραμένει σταθερό;

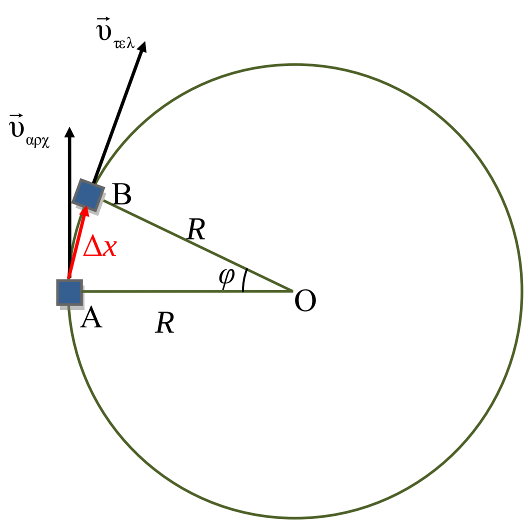
Ας ρίξουμε λοιπόν μια πιο προσεκτική ματιά σε αυτό το μέγεθος. Ακόμα και οι… λιγότερο διαβαστεροί μαθητές θυμούνται μηχανικά να λένε έναν τύπο: $a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$, όπου R η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Οι πιο παρατηρητικοί δε, ίσως άκουσαν στην παράδοση ότι *"η σχέση που μας δίνει την κεντρομόλο επιτάχυνση στην κυκλική κίνηση είναι* $a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$, ***και την έχουμε χωρίς απόδειξη**"* που σημαίνει ότι για τη φυσική της δευτέρας Λυκείου, δεν χρειάζεται να ξέρουμε πώς βγαίνει αυτή η σχέση!

Προφανώς όλες οι σχέσεις στη φυσική έχουν τις αποδείξεις τους. Και η απόδειξη της παραπάνω σχέσης έχει πολύ ενδιαφέρον καθώς συνδυάζει και γνώσεις μαθηματικών που διδάσκονται οι μαθητές επίσης στη δευτέρα Λυκείου στα μαθηματικά προσανατολισμού, και συγκεκριμένα διανυσματικό λογισμό.

Παρακάτω θα προσπαθήσουμε με απλό τρόπο να δώσουμε μία απόδειξη της σχέσης που μας δίνει την κεντρομόλο επιτάχυνση, με στόχο να… πείσουμε και τους πιο δύσπιστους ότι η κυκλική κίνηση -ακόμα και όταν είναι ομαλή- έχει επιτάχυνση!

Βήμα 1ο: "Στήνουμε" το πρόβλημα

Σκεφτείτε ένα κινητό το οποίο κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου πάνω σε κυκλική τροχιά (σχήμα 1) και μεταβαίνει από το σημείο Α στο σημείο Β διανύοντας ένα διάστημα Δs.



Σχήμα 1

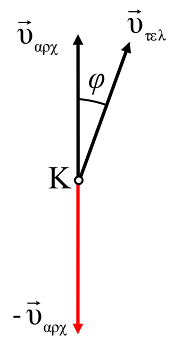
Στη θέση Α θα έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}$ ενώ στη θέση Β θα έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}$. (Ξαναλέμε ότι μόνο τα μέτρα των ταχυτήτων αυτών είναι ίσα $\left(\left|\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}\right| = \left|\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}\right|\right)$ και όχι τα διανύσματα των ταχυτήτων.)

Αν τώρα τα σημεία Α και Β είναι πολύ κοντά μεταξύ τους (δηλαδή μεσολαβεί ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα για να μεταβεί το κινητό από το Α στο Β) μπορούμε να δεχθούμε ότι το μήκος του τόξου Δs που διανύει το κινητό είναι ίσο με το μέτρο της μετατόπισης Δx που φαίνεται με κόκκινο χρώμα στο σχήμα 1.

Σχηματίζεται λοιπόν ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΟΒ με ίσες πλευρές τις ακτίνες R του κύκλου.

Βήμα 2ο: Βρίσκουμε τη μεταβολή <u>του διανύσματος</u> της ταχύτητας

Η μεταβολή της ταχύτητας θα είναι $\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}-\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}$ αλλά **ΠΡΟΣΟΧΗ**: Η σχέση αυτή είναι διανυσματική, που σημαίνει ότι πρέπει να "ζωγραφίσουμε" τα διανύσματα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα 2: Πρώτα σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}$ και $\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}$ με κοινή αρχή ένα σημείο Κ. Η γωνία που σχηματίζουν θα είναι ίση με τη γωνία που έχει διαγράψει η επιβατική ακτίνα του κινητού στο σχήμα 1, δηλαδή φ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες).

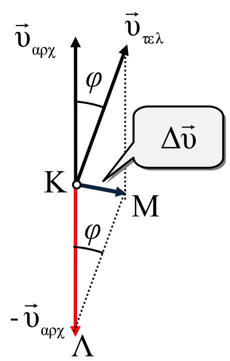


Σχήμα 2

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάνυσμα $-\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}$ (κόκκινο χρώμα) δηλαδή το αντίθετο του $\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}$. Στην ουσία η σχέση $\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}-\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}$ μπορεί να γραφτεί $\Delta\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}+(-\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi})$ και να προσθέσουμε διανυσματικά (κανόνας παραλληλογράμμου) τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}$ και $-\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3 ώστε να πάρουμε τελικά το διάνυσμα $\Delta\vec{\upsilon}$.

Τώρα προσέξτε στο σχήμα 3: Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές την κόκκινου χρώματος ΚΛ και τη διακεκομμένη ΜΛ (διότι τα μήκη τους είναι ίσα με τα μέτρα των ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_{\tau\varepsilon\lambda}$ και $-\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}$). Αυτό το τρίγωνο ΚΛΜ όμως, είναι όμοιο με το ΑΟΒ του σχήματος 1 (διότι είναι ισοσκελή και έχουν ίσες περιεχόμενες γωνίες φ). Άρα σύμφωνα με την ομοιότητα τριγώνων, απέναντι από ίσες γωνίες έχουμε ανάλογες πλευρές:

$$\frac{\text{ΚΜ}}{\text{ΑΒ}}=\frac{\text{ΚΛ}}{\text{ΟΑ}} \quad \text{ή} \quad \frac{|\Delta\vec{\upsilon}|}{|-\vec{\upsilon}_{\alpha\rho\chi}|}=\frac{|\Delta\vec{x}|}{R}$$



Σχήμα 3

Και για να μην γράφουμε τις απόλυτες τιμές, μπορούμε να συμφωνήσουμε ότι με Δυ, υ και Δx θα γράφουμε αντίστοιχα τα μέτρα: της μεταβολής της ταχύτητας, της ταχύτητας και της μετατόπισης του κινητού.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon}=\frac{\Delta x}{R} \quad \text{ή} \quad \boxed{\Delta\upsilon=\upsilon\frac{\Delta x}{R}} \quad (1)$$

Βήμα 3ο: Βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας

Ήδη θα πρέπει και οι αρχικά μπερδεμένοι μαθητές, να αντιλαμβάνονται καλύτερα το διάνυσμα της μεταβολής της ταχύτητας, τώρα που το σχεδιάσαμε. Και αφού υπάρχει μεταβολή της ταχύτητας, θα υπάρχει και ο αντίστοιχος ρυθμός με τον οποίο αυτή μεταβάλλεται. Κάπως έτσι λοιπόν φτάνουμε στην επιτάχυνση! Όπως γνωρίζουμε και από μικρότερες τάξεις, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση, δηλαδή $a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$.

Όμως εξαιτίας της σχέσης (1), θα έχουμε:

$$a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \qquad ή \qquad a = \frac{\upsilon \frac{\Delta x}{R}}{\Delta t} \qquad ή \qquad a = \frac{\upsilon}{R}\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Η γραμμική ταχύτητα του κινητού όμως είναι: $\upsilon = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, άρα για την επιτάχυνση, που πλέον θα ονομάζουμε κεντρομόλο* και θα συμβολίζουμε με $\vec{a}_\kappa$, έχουμε διαδοχικά:

$$a_\kappa = \frac{\upsilon}{R}\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad ή \qquad a_\kappa = \frac{\upsilon}{R}\upsilon$$

$$ή \quad \boxed{\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}}$$

***Η λέξη κεντρομόλος προέρχεται από τις λέξεις κέντρο και από το ρήμα βλώσκω που σημαίνει έρχομαι και έχει αόριστο έμολον. Η "κεντρομόλος" δηλαδή είναι αυτή που φέρεται προς το κέντρο. (Από το ίδιο ρήμα προέρχεται η μετοχή αορίστου "μολών" στη φράση του Λεωνίδα προς τον Ξέρξη "μολών λαβέ".)**

Επιμέλεια: Γιάννης Δαμιανίδης