



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Πανελλαδικές
Εξετάσεις 2019

Μαθηματικά Προσανατολισμού 10/06/2019

Προτεινόμενες λύσεις

ΘΕΜΑ Α

A1.

α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

β) i. Για να έχει η συνάρτηση f αντίστροφη πρέπει να είναι 1-1.

ii. Η αντίστροφη f^{-1} της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f και ισχύει:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } y \in f(A).$$

A2.

Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$.

A3.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

οπότε:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε ότι:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

A4.

α) ΛΑΘΟΣ Για παράδειγμα έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) ΛΑΘΟΣ Έστω η συνάρτηση:

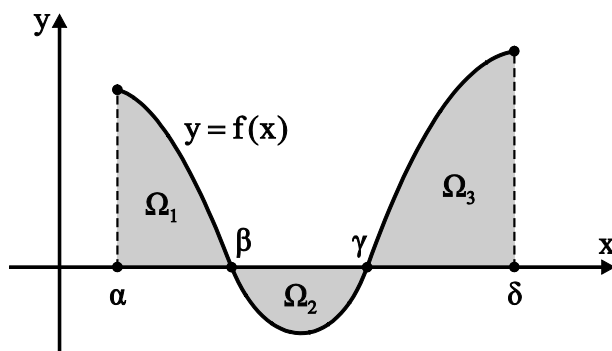
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

με $D_f = \mathbb{R}$. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \text{ αλλά } f(0) = -1,$$

δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$.

A5.



- $E(\Omega_1) = 2 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x)dx = 2$
- $E(\Omega_2) = 1 \Leftrightarrow -\int_\beta^\gamma f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_\beta^\gamma f(x)dx = -1$
- $E(\Omega_3) = 3 \Leftrightarrow \int_\gamma^\delta f(x)dx = 3$

$$\text{Άρα: } \int_a^\delta f(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\delta f(x)dx = 2 + (-1) + 3 = 4,$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η (γ).



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ΘΕΜΑ Β

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

B1.

Η συνάρτηση f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$, άρα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Leftrightarrow 0 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2,$$

καθώς $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$.

B2.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής στο $[2, 3]$, ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $g(2) = e^{-2} - 2 + 2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0$
- $g(3) = e^{-3} - 3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1 - e^3}{e^3} < 0$

Τότε $g(2) \cdot g(3) < 0$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$, άρα και η εξίσωση $f(x) - x = 0$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2, 3)$.

Η συνάρτηση $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, άρα η λύση είναι μοναδική.

B3.

Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + 2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, οπότε η f είναι αντιστρέψιμη.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = 2$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (2, +\infty), \text{ δηλαδή } f(\mathbb{R}) = (2, +\infty),$$

οπότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f έχει πεδίο ορισμού $D_{f^{-1}} = (2, +\infty)$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Θέτουμε $f(x) = y$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 2$

$$\Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \Leftrightarrow \ln e^{-x} = \ln(y - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x = \ln(y - 2) \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2), \quad y > 2.$$

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$, $x > 2$.

B4.

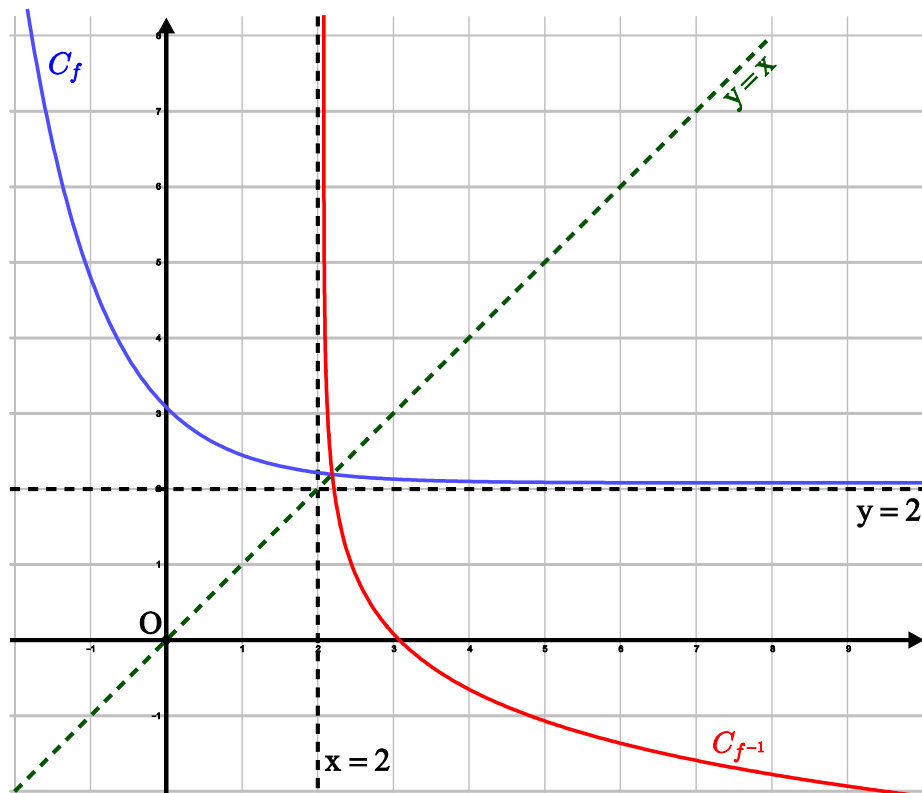
$$D_{f^{-1}} = (2, +\infty)$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) = -(-\infty) = +\infty$$

άρα η ευθεία $\varepsilon: x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:





σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$.

Γ1.

$D_f = \mathbb{R}$. Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα συνεχής και στο 1. Έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha = f(1)$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta$

Επομένως $1 + \alpha = 1 + \beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \beta}$, με $f(1) = 1 + \alpha = 1 + \beta$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, έτσι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \in \mathbb{R}.$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - (1 + \alpha)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2, \text{ άρα } \boxed{f'(1) = 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - (1 + \alpha)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - (1 + \beta)}{x - 1} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = 1 + \beta.$

Επομένως: $2 = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$, άρα και $\alpha = 1$.

Γ2.

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 1$ είναι: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + x, & x < 1 \end{cases}$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

- Για $x > 1$: $f'(x) = 2x > 0$
- Για $x < 1$: $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$

Άρα, αφού η f είναι συνεχής στο 1 (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$), η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = 0 + (-\infty) = -\infty$, καθώς $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty), \text{ δηλαδή } f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Σχόλιο

Κάνει εντύπωση η επιλογή "προκλητικά" απλών ορίων στο Γ_2 (!) και γενικότερα πολύ απλών συναρτήσεων στους κλάδους της f , με συνέπεια και μια απλούστατη μελέτη μονοτονίας που γίνεται και χωρίς χρήση παραγώγων...

Γ3.

(i) Προφανώς $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_0 \in D_f = \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $x_0 < 0$.

1ος τρόπος

Αν $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, τότε $f(\Delta_1) = (-\infty, e^{-1})$, άρα $0 \in f(\Delta_1)$, οπότε $x_0 \in (-\infty, 0)$.

2ος τρόπος

Η f πληροί τις προϋποθέσεις του θ. Bolzano στο $[-1, 0]$, με:

- $f(-1) = e^{-2} - 1 = \frac{1}{e^2} - 1 = \frac{1-e^2}{e^2} < 0$
- $f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

3ος τρόπος

Αρκετοί μαθητές απέκλεισαν τον κλάδο $f(x) = x^2 + 1 > 0$, οπότε εργαζόμενοι αναλόγως αναζήτησαν το x_0 από τον κλάδο $f(x) = e^{x-1} + x$.

Σε κάθε περίπτωση, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 στο $\mathbb{R}$, το x_0 είναι μοναδικό και όπως πάντα συμβαίνει σε αυτές τις περιπτώσεις:

- για $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- για $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$

Το πρόσημο της f είναι καθαρό και δεν υπάρχει ανάγκη κάποιος να επικαλεσθεί το σταθερό πρόσημο της συνεχούς $f(x)$ στα διαστήματα $(-\infty, x_0)$ και $(x_0, +\infty)$ με δοκιμές (κάτι που πάντως είναι σωστό, αλλά χρονοβόρο για $x < x_0$).

	$-\infty$	x_0	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$+$	

(ii) Με $x > x_0$ λοιπόν είναι $f(x) > 0$.

Έστω πως υπάρχει $x_1 \in (x_0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε:

$$f^2(x_1) - x_0 f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1)(f(x_1) - x_0) = 0 \stackrel{f(x_1) > 0}{\Leftrightarrow} f(x_1) - x_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = x_0, \text{ το οποίο είναι άτοπο,}$$

καθώς $f(x_1) > 0$, ενώ $x_0 < 0$. Άρα δεν υπάρχει κανείς αριθμός στο $(x_0, +\infty)$ που να αποτελεί λύση της εξίσωσης $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$, άρα η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Σχόλιο

Ένα ενδιαφέρον απλό ερώτημα και πάλι βασισμένο στο πρόσημο της μονότονης f γύρω από τη μοναδική ρίζα της. Μια πρόταση θα ήταν η μελέτη της εξίσωσης και στο $(-\infty, x_0)$ με $f(x) < 0$ και η αναζήτηση $x_1 \in (-\infty, x_0)$ τέτοιου, ώστε $f(x_1) = x_0 < 0$ (με τον x_1 να υπάρχει πάντα και να είναι μοναδικός) στη λογική του Δ3 του 2018. Αυτό βέβαια θα είχε ως συνέπεια να αυξηθεί η δυσκολία του ερωτήματος...



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Γ4.

Για κάθε $x \geq 1$ είναι $y = x^2 + 1$, το σημείο $M(x, y)$ κινείται πάνω στη C_f σύμφωνα με τις συναρτήσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Άρα σε κάθε χρονική στιγμή t ισχύει:

$$y(t) = x^2(t) + 1 \quad \text{και} \quad y'(t) = 2x(t) \cdot x'(t).$$

Έτσι τη χρονική στιγμή t_0 ισχύουν:

$$x(t_0) = 3, \quad y(t_0) = 10, \quad x'(t_0) = 2 \text{ μον./sec και}$$

$$y'(t_0) = 2x(t_0) \cdot x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12 \text{ μον./sec.}$$

Με $x, y > 0$ το $E_{\text{ΜΟΚ}} = \frac{1}{2}x \cdot y$ είναι συνάρτηση του χρόνου με $E(t) = \frac{1}{2}x(t) \cdot y(t)$.

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε:

$$E'(t) = \frac{1}{2}(x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t)),$$

οπότε για τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει:

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}(x'(t_0) \cdot y(t_0) + x(t_0) \cdot y'(t_0)) = \frac{1}{2}(2 \cdot 10 + 3 \cdot 12) =$$

$$= \frac{1}{2}(20 + 36) = \frac{1}{2} \cdot 56 = 28 \text{ τετρ. μον./sec.}$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Εφόσον η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $A(1, 1)$ ισχύουν τα εξής:

$$f(1) = 1 \text{ και } f'(1) = -1.$$

Άρα:

- $f(1) = 1 \Leftrightarrow (1-1) \cdot \ln 1 + \alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow 0 + \alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$
- $f'(1) = -1 \Leftrightarrow \ln 1 + (1-1) \cdot \frac{2-2}{1} + \alpha = -1 \Leftrightarrow 0 + \alpha = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1}$. Τότε: $\boxed{\beta = 2}$.

Σχόλιο

Εύκολα φαίνεται για την $f(x)$ ότι:

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0, \text{ άρα } x \in \mathbb{R}$$

κάτι που αρκετοί μαθητές χρησιμοποιούν παρακάτω.

Δ2.

Για $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ είναι:

$$f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - (-x + 2) \Leftrightarrow h(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow h(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Τότε το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι ίσο με: $E = \int_1^2 |h(x)| dx$.

Σχετικά με το πρόσημο της $h(x)$ στο $[1, 2]$:



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

1ος τρόπος

- για κάθε $x \geq 1$ είναι $x-1 \geq 0$
- $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 1$, άρα

$$\ln(x^2 - 2x + 2) \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0$$

Συνεπώς $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

2ος τρόπος

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως συνθέσεις και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{4(x-1)(x^2-2x+2) - 2(x-1)^2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{(2x-2)(x^2-2x+2) + 4(x-1)(x^2-2x+2) - 2(x-1)^2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{2(x-1)[x^2-2x+2 + 2(x^2-2x+2) - 2(x-1)^2]}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{2(x-1)(x^2-2x+4 + 2x^2-4x+4 - 2x^2+4x-2)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2} \\ &= \frac{2(x-1)(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)^2} \end{aligned}$$

Το πρόσημο και οι ρίζες της $f''(x)$ εξαρτώνται αποκλειστικά από την παράσταση $x-1$, καθώς $x^2-2x+4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Το πρόσημο της $f''(x)$ και η κυρτότητα της $f(x)$ συγκεντρώνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	ο	+
$f(x)$		σ.κ.	



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Έτσι με $x \in [1, 2]$ η κυρτή $f(x)$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της $\varepsilon: y = -x + 2$ με μόνο κοινό σημείο το $A(1, 1)$. Άρα $f(x) \geq -x + 2$ για κάθε $x \in [1, 2]$ με το " $=$ " να ισχύει μόνο για $x = 1$. Άρα $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$, με το " $=$ " μόνο για $x = 1$.

Σχόλιο

Οι τρόποι είναι διαφορετικοί ως προς την φιλοσοφία τους και το χρόνο δουλειάς τους. Ο 1ος είναι βασισμένος σε απλές γνώσεις α' και β' Λυκείου. Ο 2ος είναι κλασικός με γνώσεις γ' Λυκείου, πιο χρονοβόρος προς το παρόν, ανοίγει όμως το δρόμο για γρήγορη αντιμετώπιση του Δ3.

Το ίδιο ακριβώς επαναλήφθηκε στο ΘΕΜΑ Γ του 2018 όπου ζητήθηκε ακρότατο σε συνάρτηση τριωνύμου. Οι παράλληλοι τρόποι αναδεικνύουν τόσο την αξία της απλής Άλγεβρας β' Λυκείου όσο και των «νέων» μεθόδων της γ' Λυκείου.

Ίσως όμως στο επίπεδο ενός θέματος Δ θα έπρεπε μάλλον να προτιμηθεί ένα περιστατικό της γ' Λυκείου μόνο. Εκεί όπου η β' Λυκείου «αδυνατεί», οι γνώσεις της γ' Λυκείου δίνουν «διέξοδο».

Μια ακόμα ιδέα θα ήταν να ζητηθεί χωρίο π.χ. με τις ευθείες $x = -1$, $x = 2$, μια που επιλέχθηκε εφαπτομένη στο σημείο καμπής της f ! Κάτι που θα μπορούσε να κάνει το Δ2 λίγο πιο «παιχνιδιάρικο»...

Τελικά:

$$E = \int_1^2 h(x) dx = \int_1^2 (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) dx.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

1ος τρόπος

Θέτουμε: $\boxed{x^2 - 2x + 2 = u}$

Τότε: $2(x-1)dx = du \Leftrightarrow (x-1)dx = \frac{1}{2} du$

για $x=1$: $\boxed{u=1}$, για $x=2$: $\boxed{u=2}$

$$\text{Άρα } E = \int_1^2 \ln u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \cdot \ln u du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \cdot \frac{1}{u} du =$$

$$= \frac{1}{2} [u \cdot \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} [u]_1^2 = \frac{1}{2} 2 \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

2ος τρόπος

$$\begin{aligned}
 E &= \int_1^2 h(x) dx = \int_1^2 (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)' \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[(x^2 - 2x + 2) \ln(x^2 - 2x + 2) \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \cancel{(x^2 - 2x + 2)} \cdot \frac{2x - 2}{\cancel{x^2 - 2x + 2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 0) - \frac{1}{2} \left[x^2 - 2x \right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Δ3.

i) 1ος τρόπος

Από τη μελέτη της κυρτότητας της f προκύπτει:

	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	ο	+
$f'(x)$	↘	↗	
		ολ. min	

Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1, το $f'(1) = -1$. Επομένως ισχύει:

$$f'(x) \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ το } "=" \text{ μόνο στο } x=1.$$

2ος τρόπος

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

Έστω ότι ισχύει:

$$f'(x) \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0,$$

που ισχύει διότι:



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

- $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 1$, άρα

$$\ln(x^2 - 2x + 2) \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x = 1$.

- Όμοια $\frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$ με το "=" να ισχύει μόνο στο $x = 1$.

Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

με το "=" να ισχύει μόνο στο $x = 1$.

ii) 1ος τρόπος

Έστω ότι:

$$\begin{aligned} f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda &\geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda' &\geq f(\lambda) + \lambda' - 2 + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) &\geq -\frac{1}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$,
άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - \lambda} = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}f'(\xi) &= f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda). \end{aligned}$$

Τότε από την (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$\frac{1}{2}f'(\xi) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(\xi) \geq -1,$$

που ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική ανισότητα.



σπουδαστήριο

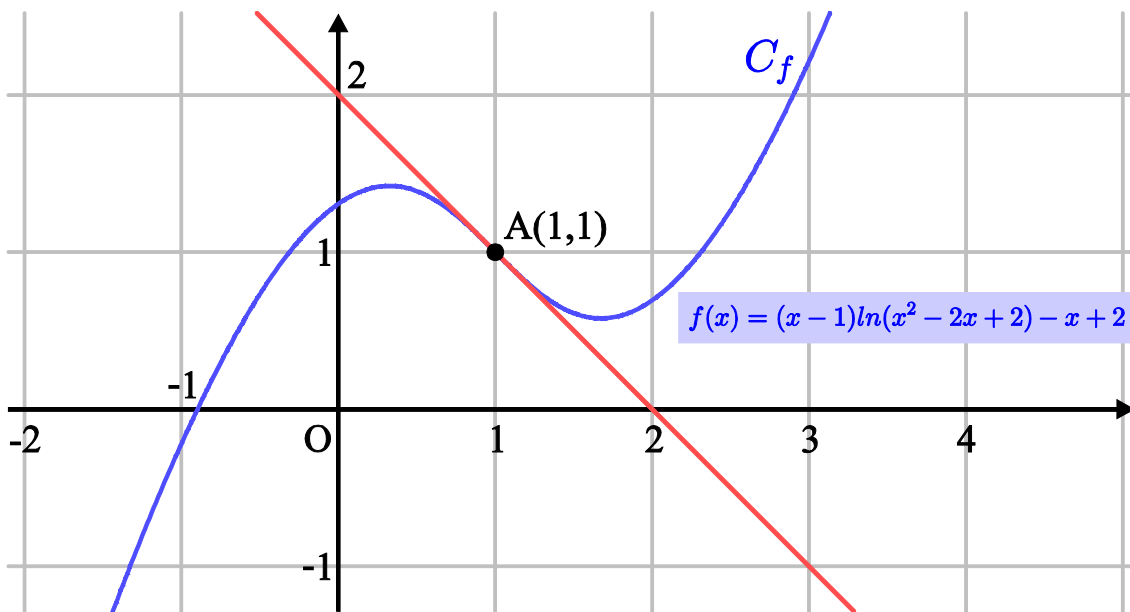
Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Σχόλιο

Καθώς η απόδειξη στηρίζεται στο ότι:

$$f'(x) \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με το "}" \text{ μόνο στο } x=1,$$

να σημειωθεί ότι η ισότητα της προς απόδειξη ανισότητας ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΠΟΤΕ (!), καθώς δεν υπάρχει χορδή της C_f με κλίση -1 , κάτι που ο μαθητής δεν το γνωρίζει, ούτε και μπορεί να το ελέγξει. Έτσι ίσως κάποιοι μαθητές να σπατάλησαν χρόνο στον έλεγχο της ισότητας.



2ος τρόπος

Έχουμε να αποδείξουμε την ανισότητα:

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq f(\lambda) + \lambda - 2 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) + \lambda - 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) + \lambda \quad (1)$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Θεωρούμε τη συνάρτηση $Z(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία εύκολα κρίνεται γνησίως αύξουσα, από το Δ3 (i). Οπότε η (1) ισοδύναμα γίνεται:

$$Z\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq Z(\lambda) \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq 0,$$

που ναι μεν ισχύει και είναι αληθές, όμως σαν ερώτημα είναι άστοχο, καθώς το " $=$ " δεν ισχύει στην ανισότητα!

Δ4.

$$f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$$

Η συνάρτηση $g(x) = -x^3 - x + 2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με:

$$g'(x) = -3x^2 - 1.$$

- Έστω $A(x_1, f(x_1))$ το σημείο επαφής της τυχαίας εφαπτομένης με τη C_f . Είναι:

$$\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_1 : y = f'(x_1)x - x_1 f'(x_1) + f(x_1)$$

- Έστω $B(x_2, g(x_2))$ το σημείο επαφής της τυχαίας εφαπτομένης με τη C_g . Είναι:

$$\varepsilon_2 : y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_2 : y = g'(x_2)x - g'(x_2)x_2 + g(x_2)$$

Για να υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g πρέπει:

$$f'(x_1) = g'(x_2) \quad (1)$$

και

$$-x_1 f'(x_1) + f(x_1) = -g'(x_2)x_2 + g(x_2) \quad (2)$$

Από (1) $\Rightarrow f'(x_1) = -3x_2^2 - 1$. Όμως $f'(x_1) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με το " $=$ ", να ισχύει μόνο στο $x_1 = 1$.

Πρέπει: $-3x_2^2 \not\geq -1 \Leftrightarrow 3x_2^2 \leq 0$ ισχύει μόνο στο $x_2 = 0$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Άρα η (1) και κατά συνέπεια και το σύστημα των (1) και (2) έχει νόημα μόνο αν $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$ δηλαδή αν $A(1, 1)$ και $B(0, 2)$.

Στο $A(1, 1)$ η C_f έχει εφαπτομένη την ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$, η οποία εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι και εφαπτομένη της C_g στο $B(0, 2)$, καθώς $g(0) = 2$ και $g'(0) = -1$.

Άρα οι C_f , C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη την $\varepsilon: y = -x + 2$ (σε μη κοινό σημείο).

Σχόλιο

Ένα είδος «δυσκολίας» είναι ότι στην (1) έπρεπε ο μαθητής να μην αντικαταστήσει την $f'(x)$ καθώς γίνονταν πολύπλοκο. Για την ιστορία το περιστατικό κοινής εφαπτομένης σε μη κοινό σημείο υπήρξε το 2006 με τις $\ln x$ και e^x με παρόμοιο ζητούμενο.

επιμέλεια λύσεων:
Γιάννης Ανδρεάδης
Ηλίας Ντεϊρμεντζίδης
Ελένη Χατζηαποστόλου