σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Πανελλαδικές Εξετάσεις 2023

Μαθηματικά Προσανατολισμού 06 Ιουνίου 2023

Προτεινόμενες λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Α2.

Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}.$$

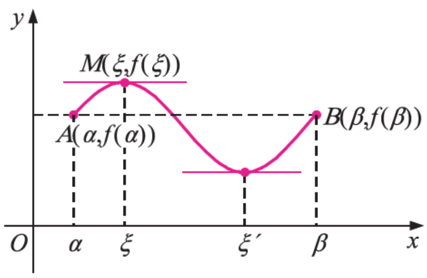
Α3.

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=0.$$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

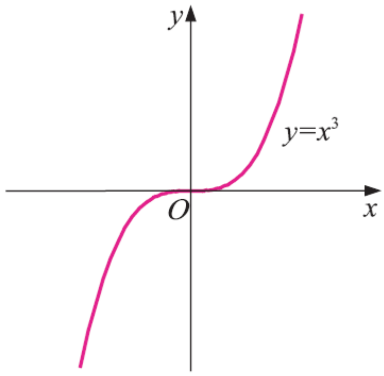
Α4.

α) <u>ΛΑΘΟΣ</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

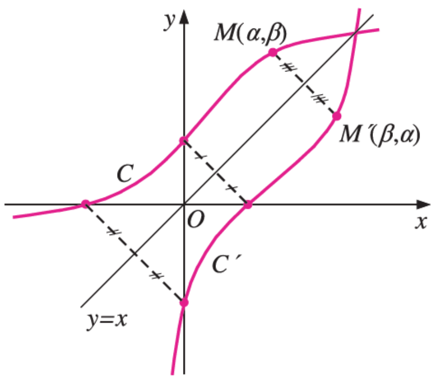
β) <u>ΛΑΘΟΣ</u> Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική και δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη, καθώς:

$$f'(x)=3x^2+5>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

γ) <u>ΛΑΘΟΣ</u> Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f(x)=3x^2$, η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0)=0$. Ισχύει όμως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.



δ) <u>ΣΩΣΤΟ</u> Οι γραφικές παραστάσεις C και C′ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′.



ε) <u>ΣΩΣΤΟ</u> Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

ΘΕΜΑ Β

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$ και $h:(0,\,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

B1.

$D_g=\mathbb{R}$ και $D_h=(0,\,+\infty)$, οπότε:

$$D_{g\circ h}=\left\{x\in D_h \ \text{ και } \ h(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in(0,\,+\infty)\ \text{ και } \ \ln x\in\mathbb{R}\right\}=(0,\,+\infty),$$

δηλαδή $D_f=D_{g\circ h}=(0,\,+\infty)$.

Για $x>0$ ο τύπος της $g\circ h$ είναι:

$$(g\circ h)(x)=g\big(h(x)\big)=\frac{4-e^{2h(x)}}{e^{h(x)}}=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-e^{\ln x^2}}{x}=\frac{4-x^2}{x},$$

δηλαδή:

$$f(x)=(g\circ h)(x)=\frac{4-x^2}{x},\ \ x>0.$$

B2.

Είναι: $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}=\dfrac{4}{x}-x$, $x>0$

i) Η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=-\frac{4}{x^2}-1<0 \ \text{ για κάθε } \ x>0,$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\,+\infty)$.

ii) Είναι:

$$\pi>e\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\pi)<f(e)\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e},$$

διότι: $4-e^2<0$ και $\pi>0$.

Β3.

$D_f=(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως ρητή.

Θα εξετάσουμε αν η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στη θέση 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4-x^2}{x}\overset{\frac{4}{0^+}}{=}+\infty,$$

άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Εξετάζουμε αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$. Είναι:

$$f(x)=\frac{4}{x}-x \Leftrightarrow f(x)-(-x)=\frac{4}{x},$$

οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}\overset{\frac{4}{+\infty}}{=}0,$$

επομένως η ευθεία $\varepsilon: y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty,\ \text{επομένως}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}\overset{\frac{1}{-\infty}}{=}0.$$

Τότε:

$$\left|\frac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)}\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\cdot\text{συν}(1+x^2)\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot|\text{συν}(1+x^2)|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot 1=\left|\frac{1}{f(x)}\right|,$$

δηλαδή:

$$\left|\frac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)}\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)}\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|.$$

Όμως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right)=0=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

Άρα, σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)}=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}+\alpha, & x\geq 1 \end{cases}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $\int_2^3 xf(x)dx=1$.

Γ1.

Ισχύει:

$$\int_2^3 xf(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx=1 \Leftrightarrow \left[x+\alpha\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3+\alpha\frac{3^2}{2}\right)-\left(2+\alpha\frac{2^2}{2}\right)=1 \Leftrightarrow 3+\frac{9}{2}\alpha-2-\frac{4}{2}\alpha=1 \Leftrightarrow \cancel{1}+\frac{5}{2}\alpha=\cancel{1} \Leftrightarrow \frac{5}{2}\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0.$$

Γ2.

Για $\alpha=0$ είναι: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}, & x\geq 1 \end{cases}$.

i) Είναι $f(1)=\frac{1}{1}\Leftrightarrow f(1)=1$.

- $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-3}{1}=2\cdot 1-3=-1$$

- $$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{\cancel{x-1}}{x\,\cancel{(x-1)}}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, με $f'(1)=-1$, οπότε ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ είναι:

$$\varepsilon:\ y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \varepsilon:\ y-1=(-1)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon:\ y-1=-x+1 \Leftrightarrow \varepsilon:\ y=-x+2.$$

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$, τότε ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\omega=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=f'(1) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=-1,\ \text{άρα}\ \omega=\frac{3\pi}{4}.$$

Γ3.

- $D_f = \mathbb{R}$

- Αν $x < 1$: $f'(x) = 2x - 3 < 0$, διότι:

$$x < 1 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow 2x - 3 < 2 - 3 \Leftrightarrow 2x - 3 < -1 < 0$$

- Αν $x < 1$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Άρα, αφού η f είναι συνεχής στο 1, ως παραγωγίσιμη σε αυτό, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως $1-1$.

<u>Διαφορετικά</u>

$f'(1) = -1 < 0$, οπότε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως $1-1$.

Για το σύνολο τιμών της f:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 - 3x + 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

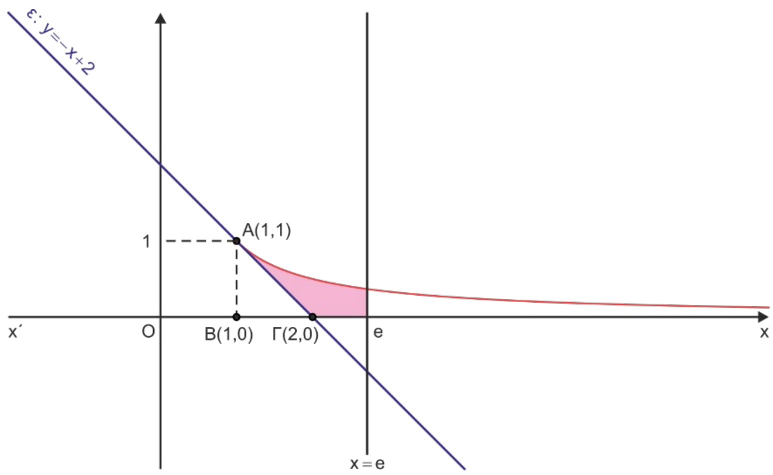
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \overset{\frac{1}{+\infty}}{=} 0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0,\ +\infty),\ \text{δηλαδή } f(\mathbb{R}) = (0,\ +\infty).$$

Γ4.

Η ευθεία ε: $y = -x + 2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(2, 0)$. Επομένως θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, έστω Ω.



Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$, οπότε είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x)|\,dx - E_{AB\Gamma}.$$

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, άρα:

$$\int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^e = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

Επίσης:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}(B\Gamma)\cdot(AB) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Τελικά, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x)|\,dx - E_{AB\Gamma} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Συνάρτηση $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}.$$

Δ1.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$ με x κοντά στο $x_0=1$ και $\lim_{x\to 3}h(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Τότε:

$$h(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}\Leftrightarrow f(x)-2x=(x-1)h(x)\Leftrightarrow f(x)=(x-1)h(x)+2x$$

με x κοντά στο $x_0=1$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}[(x-1)h(x)+2x]=0\cdot\ell+2\cdot 1=2,$$

δηλαδή $\lim_{x\to 1}f(x)=2$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $(0,2)$, ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα και στο $x_0=1$, άρα:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow 2=\ln(2-1)-\frac{1}{1}+\kappa\Leftrightarrow 2=\ln 1-1+\kappa\Leftrightarrow \kappa=3.$$

Δ2.

Για $\kappa=3$ είναι:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3,\ x\in(0,2).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x)=\frac{1}{2-x}\cdot(-1)+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2-x}=\frac{2-x-x^2}{x^2(2-x)}=\frac{-x^2-x-2}{x^2(2-x)}=\frac{(x+2)(1-x)}{x^2(2-x)}.$$

Το πρόσημο και ο μηδενισμός της $f'(x)$ εξαρτώνται μόνο από την ποσότητα $1-x$, καθώς $\dfrac{x+2}{x^2(2-x)}>0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

Το πρόσημο της f', καθώς και η μονοτονία της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	ολ. max	$\searrow$	

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=\ln 2-(+\infty)+3=-\infty,$$

  αφού $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$.

- $f(1)=2$.

- $$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=(-\infty)-\frac{1}{2}+3=-\infty,$$

  αφού $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\ln(2-x)\ \underset{u\to 0^+}{\overset{2-x=u}{=\!=\!=}}\ \lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_1=(0,1]$ άρα:

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x),\ f(1)\right]=(-\infty,2].$$

- Το $0\in f(A_1)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$ στο $(0,1]$, άρα το x_1 είναι μοναδικό.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=[1,2)$ άρα:

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to 2^-} f(x),\ f(1)\right]=(-\infty,2].$$

- Το $0\in f(A_2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(1,2)$, τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$. Όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1-1$ στο $[1,2)$, άρα το x_2 είναι μοναδικό.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1,\ x_2$ με $x_1<1<x_2$.

Θα αποδείξουμε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$.

Έστω ότι:

$$x_1 < \frac{1}{3} \underset{x\in(0,1)}{\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\left(2-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 \Leftrightarrow 0 < \ln\frac{5}{3} \cancel{-3} \cancel{+3} \Leftrightarrow \ln\frac{5}{3} > 0,$$

που ισχύει, διότι:

$$\frac{5}{3} > 1 \Leftrightarrow \ln\frac{5}{3} > \ln 1 \Leftrightarrow \ln\frac{5}{3} > 0.$$

Επομένως ισχύει και η αρχική ανισότητα, οπότε είναι $x_1 < \frac{1}{3}$.

Δ3.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$, ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$, ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - 0}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Η συνάρτηση $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^4}\cdot 2x + \frac{1}{(2-x)^2}\cdot(-1) = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{(2-x)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,2).$$

Οπότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2)$, άρα και $1-1$ στο διάστημα αυτό, άρα το ξ είναι μοναδικό.

Τελικά υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση $f'(\xi)$ της C_f να ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Δ4.

F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της f στο $(0,2)$ με $F(x_1)=G(x_2)=0$.

i) Αφού F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της f στο $(0,2)$ θα ισχύει:

$$F(x)=G(x)+c\text{, όπου } c\in\mathbb{R}\text{, για κάθε } x\in(0,2).$$

Για $x=x_1$:

$$F(x_1)=G(x_1)+c\Leftrightarrow 0=G(x_1)+c\Leftrightarrow c=-G(x_1)\ \ (1)$$

Για $x=x_2$:

$$F(x_2)=G(x_2)+c\Leftrightarrow F(x_2)=0+c\Leftrightarrow F(x_2)=c\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$F(x_2)=-G(x_1)\Leftrightarrow F(x_2)+G(x_1)=0.$$

ii) Θεωρούμε συνάρτηση:

$$H(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x,\ \ x\in[x_1,x_2].$$

- F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της f στο $(0,2)$, άρα F, G παραγωγίσιμες στο $(0,2)$, άρα και συνεχείς στο $(0,2)$, άρα συνεχείς και στο $[x_1,x_2]$.
- Η συνάρτηση $H(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $H(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=x_1\cdot 0+x_2G(x_1)+x_1-x_2=x_2G(x_1)+x_1-x_2$
- $H(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2\cdot 0+x_2-x_1=x_1F(x_2)+x_2-x_1$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$, επομένως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1,x_2) και επειδή $f(1)=2>0$, θα είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.
- F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της f, άρα:

$$F'(x)=G'(x)=f(x)>0\text{ για κάθε } x\in(x_1,x_2),$$

οπότε F, G γνησίως αύξουσες στο $[x_1,x_2]$.

- Για $x_1 < x_2 \overset{G\nearrow}{\Leftrightarrow} G(x_1) < G(x_2) \Leftrightarrow G(x_1) < 0$

  Επίσης $x_2 > 0$ και $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$.

  Επομένως:

$$H(x_1) = \underbrace{x_2}_{>0}\underbrace{G(x_1)}_{<0} + \underbrace{x_1 - x_2}_{<0} < 0$$

- Για $x_1 < x_2 \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} F(x_1) < F(x_2) \Leftrightarrow 0 < F(x_2) \Leftrightarrow F(x_2) > 0$

  Επίσης $x_1 > 0$ και $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$.

Επομένως:

$$H(x_2) = \underbrace{x_1}_{>0}\underbrace{F(x_2)}_{>0} + \underbrace{x_2 - x_1}_{>0} > 0.$$

Τότε $H(x_1) \cdot H(x_2) < 0$ άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $H(x_0) = 0$.

Όμως η συνάρτηση $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$H'(x) = x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 =$$

$$= (x_1 + x_2)f(x) + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2),$$

αφού $x_1 + x_2 > 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Συνεπώς η συνάρτηση $H(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1, x_2), άρα και $1-1$, άρα η λύση x_0 της εξίσωσης $H(x) = 0$ στο (x_1, x_2) είναι μοναδική.

<u>Μια πιο λεπτομερής ανάλυση πάνω στο ερώτημα (ii) του Δ4</u>

- Οι συναρτήσεις F(x), G(x) ως αρχικές της f στο $(0, 2)$ έχουν σε κάθε $x \in (0, 2)$ παράλληλες εφαπτομένες. Έτσι ακολουθούν μια «παράλληλη» πορεία, με την μία να είναι συνεχώς πάνω από την άλλη σταθερά κατά c.

- Θα δείξουμε ότι $F(x) > G(x)$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.

Οι συναρτήσεις $F(x)$, $G(x)$ είναι συνεχείς στο $[x_1, x_2]$. Καθώς ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ (από το Δ2) θα είναι $F'(x)>0$ και $G'(x)>0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, άρα $F(x)$, $G(x)$ γνησίως αύξουσες στο $[x_1, x_2]$.

- Για $x > x_1 \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} F(x) > F(x_1) \Leftrightarrow F(x) > 0$

και συνολικά:

$$x_1 < x < x_2 \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} F(x_1) < F(x) < F(x_2) \Leftrightarrow 0 < F(x) < F(x_2).$$

Όμοια:

$$x_1 < x < x_2 \overset{G\nearrow}{\Leftrightarrow} G(x_1) < G(x) < G(x_2) \Leftrightarrow G(x_1) < G(x) < 0.$$

Συνοψίζοντας:

$$G(x_1) < G(x) < 0 < F(x) < F(x_2).$$

Άρα για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ η C_F βρίσκεται πάνω από τη C_G και μάλιστα:

$$G(x_1) < 0 < F(x_2).$$

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x = 0 \quad (1)$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο (x_1, x_2).

<u>1ος τρόπος</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$H(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x, \ x \in [x_1, x_2]$$

- $H(x)$ συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως…
- $H(x_1) = \ldots = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2$.

  Όμως: $x_2 > 0$, $G(x_1) < 0$, $x_1 - x_2 < 0$, άρα $H(x_1) < 0$
- $H(x_2) = \ldots = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1$.

  Όμως: $x_1 > 0$, $F(x_2) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, άρα $H(x_2) > 0$.

Συνεπώς $H(x_1) \cdot H(x_2) < 0$, άρα (θ. Bolzano) η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον λύση στο (x_1, x_2).

2ος τρόπος

Η συνάρτηση $H(x)$ από μία άλλη οπτική:

$$H(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x \Leftrightarrow$$

$$H(x)=x_1F(x)+x_2G(x)+x-x_1+x-x_2 \Leftrightarrow$$

$$H(x)=x_1F(x)+x-x_1+x_2G(x)+x-x_2 \Leftrightarrow$$

$$H(x)=x_1F(x)-x_1F(x_1)+x-x_1+x_2G(x)-x_2G(x_2)+x-x_2 \Leftrightarrow$$

$$H(x)=x_1\left(F(x)-F(x_1)\right)+x-x_1+x_2\left(G(x)-G(x_2)\right)+x-x_2 \Leftrightarrow$$

$$H(x)=(x-x_1)\left[x_1\cdot\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}+1\right]+(x-x_2)\left[x_2\cdot\frac{G(x)-G(x_2)}{x-x_2}+1\right].$$

Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $F(x)$, $G(x)$ πληρούν τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x_1,x]$ και $[x,x_2]$, άρα υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x)$ και $\xi_2\in(x,x_2)$ τέτοια, ώστε:

$$F'(\xi_1)=\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} \quad \text{και} \quad G'(\xi_2)=\frac{G(x)-G(x_2)}{x-x_2}.$$

Άρα:

$$f(\xi_1)=\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} \quad \text{και} \quad f(\xi_2)=\frac{G(x)-G(x_2)}{x-x_2},$$

με $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.

Άρα η συνάρτηση $H(x)$ παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{H(x)=(x-x_1)\left[x_1\cdot f(\xi_1)+1\right]+(x-x_2)\left[x_2\cdot f(\xi_2)+1\right]} \quad (2)$$

όπου:

$$x-x_1>0,\ x-x_2<0,\ x_1\cdot f(\xi_1)+1>0 \text{ και } x_2\cdot f(\xi_2)+1>0.$$

Τελικά η συνάρτηση $H(x)$ είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού, καθώς αν γίνουν οι πράξεις πρόκειται για την ευθεία:

$$\boxed{H(x)=\left[\left(x_1\cdot f(\xi_1)+1\right)+\left(x_2\cdot f(\xi_2)+1\right)\right]x-x_1\left(x_1\cdot f(\xi_1)+1\right)-x_2\left(x_2\cdot f(\xi_2)+1\right)} \quad (3)$$

η οποία έχει θετική κλίση, άρα είναι γνησίως αύξουσα.

- Στη μορφή (2) η συνάρτηση $H(x)$ με παρόμοιο τρόπο υποστηρίζει θεώρημα Bolzano στο $[x_1, x_2]$ με αρκετά εύκολα και φανερά πρόσημα.
- Στη μορφή (3) επίσης εύκολα κανείς βρίσκει ότι $H(x_1) < 0$ και $H(x_2) > 0$ και επιπλέον έχει το πλεονέκτημα να αιτιολογήσει τη μοναδικότητα της ρίζας στο (x_1, x_2), από το γεγονός ότι η συνάρτηση $H(x)$ είναι ευθεία!

▪ Μια ακόμη προσέγγιση είναι η εξής:

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο στο x_1 και στο x_2, οπότε:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow [F(x)]_{x_1}^{x_2} > 0 \Leftrightarrow F(x_2) - F(x_1) > 0 \Leftrightarrow F(x_2) - 0 > 0 \Leftrightarrow F(x_2) > 0 .$$

Όμοια, μέσω της $G(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow [G(x)]_{x_1}^{x_2} > 0 \Leftrightarrow G(x_2) - G(x_1) > 0 \Leftrightarrow 0 - G(x_1) > 0 \Leftrightarrow G(x_1) < 0 .$$

Έχοντας ανάγκη τη μοναδικότητα της ρίζας της $H(x)$ στο (x_1, x_2), με την $H(x)$ παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), έχουμε:

$$H'(x) = x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 = (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_1, x_2),$$

άρα η συνάρτηση $H(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$, άρα έχει μοναδική ρίζα.

<u>1ο σχόλιο</u>

Το θετικό πρόσημο της $f(x)$ στο (x_1, x_2) προκύπτει έτσι κι αλλιώς από τη μονοτονία της:

- Αν $x \in (0, 1]$, τότε:
  - $0 < x < x_1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_1) \Leftrightarrow f(x) < 0$
  - $x_1 < x \leq 1 \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Αν $x \in [1, 2)$, τότε:
  - $1 \leq x < x_2 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x) > 0$
  - $x_2 < x < 2 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x_2) > f(x) \Leftrightarrow 0 > f(x) \Leftrightarrow f(x) < 0$

	0		x_1		1		x_2		2
$f(x)$	‖	−	0	+	|	+	0	−	‖

Φυσικά υπάρχει και η αξιοποίηση της πληροφορίας $f(1) = 2 > 0$ και καθώς η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_1, x_2) προκύπτει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

<u>2ο σχόλιο</u> (γενικό)

Τα θέματα είναι λίγο πιο εύκολα από το 2022.

Εκεί στο Θέμα Β υπάρχει Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, ενώ τώρα ένα σοβαρό, αλλά αρκετά γνωστό όριο.

Εδώ στο Θέμα Γ όλα ήταν βατά, ομαλά, χωρίς εκπλήξεις, με εύκολα όρια και γρήγορους υπολογισμούς. Ακόμη και το εμβαδόν χωρίου είναι βασική περίπτωση!

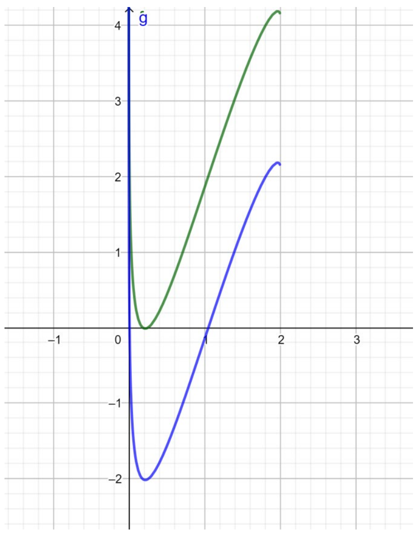
Στο δε Θέμα Δ φέτος όλα ήταν βατά, μέχρι και το Δ3. Θέματα που έχουμε δει κατ' επανάληψη, ενώ το 2022 τα Δ3 και Δ4 απαιτούσαν παραπάνω σκέψη και χρόνο συνολικά.

x	0		x_1		1		x_2		2
$F'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

x	0		x_1		1		x_2		2
$G'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

x	0		1		2
$F''(x)=f'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\cup$	σ.κ.	$\cap$	

x	0		1		2
$G''(x)=f'(x)$		$+$	0	$-$	
$G(x)$		$\cup$	σ.κ.	$\cap$	



επιμέλεια λύσεων:
Γιάννης Ανδρεάδης
Ηλίας Ντεϊρμεντζίδης