



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Πανελλαδικές
Εξετάσεις 2025

Μαθηματικά Προσανατολισμού, 02 Ιουνίου 2025

Προτεινόμενες λύσεις

ΘΕΜΑ Α

A1.

Αφού F είναι παράγουσα της f στο Δ , ισχύει ότι:

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού ισχύει ότι:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε:

$$G'(x) = F'(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Επομένως υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

A2.

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.

A3.

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

A4.

α) ΣΩΣΤΟ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΛΑΘΟΣ Αν $v \in \mathbb{N}^*$, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty$

ε) ΛΑΘΟΣ Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ΘΕΜΑ Β

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

B1.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, ως πολυωνυμική, με:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9.$$

Η f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο 1, επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, ισχύει ότι:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow a = -6.$$

B2.

Για $a = -6$ έχουμε: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. Είναι:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3.$

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	↗	↘	↗		
		τοπ. max	τοπ. min		

Συγκεκριμένα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = [1, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_3 = [3, +\infty)$.

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

- $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1 - 6 + 9 - 3 = 1$
- $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = 27 - 54 + 27 - 3 = -3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$, άρα:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1].$$

Το $0 \in f(A_1)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in (-\infty, 1)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $A_2 = [1, 3]$, άρα:

$$f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1].$$

Το $0 \in f(A_2)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in (1, 3)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1, στο διάστημα $[1, 3]$.

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $A_3 = [3, +\infty)$, άρα:

$$f(A_3) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-3, +\infty).$$

Το $0 \in f(A_3)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_3 \in (3, +\infty)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, στο διάστημα $[3, +\infty)$.

Για το πρόσημο της ρίζας x_3 :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -3$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 1,$

άρα, αφού συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(0, 1)$, είναι:

$$f((0, 1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-3, 1).$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Το $0 \in f((0, 1))$, οπότε το $x_1 \in (0, 1)$, δηλαδή και η ρίζα x_1 είναι θετική.

Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις θετικές πραγματικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

β' τρόπος

Τρεις φορές εφαρμογή του Θ. Bolzano σε διαστήματα με άκρα τα οποία έχουν θετικούς όρους, κάτι το οποίο εξασφαλίζει ότι όλες οι ρίζες είναι θετικές.

Επίσης αν κάποιος μαθητής έγραφε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, ως εξίσωση 3ου βαθμού έχει το πολύ τρεις πραγματικές λύσεις, ήταν αποδεκτό.

B3.

Η συνάρτηση $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, με:

$$f''(x) = 6x - 12.$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2.$

Το πρόσημο της $f''(x)$ και το είδος της κυρτότητας της f συγκεντρώνονται συνοπτικά στον επόμενο πίνακα:

	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	ο	+
$f(x)$	↘	σ.κ.	↗

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$, κυρτή στο $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει στο $x = 2$ σημείο καμψής το $A(0, f(2))$, δηλαδή το $A(2, -1)$.

B4.

Είναι $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$g'(x) = f'(x) + 1.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι:

$$\varepsilon_1 : y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \quad (1)$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$ είναι:

$$\varepsilon_2 : y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_2 : y = (f'(\xi) + 1)(x - \xi) + \xi + f(\xi) \quad (2)$$

Για να βρούμε το κοινό σημείο των δύο ευθειών λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(\xi)(x - \xi) + \cancel{f(\xi)} = (f'(\xi) + 1)(x - \xi) + \xi + \cancel{f(\xi)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{f'(\xi)(x - \xi)} = \cancel{f'(\xi)(x - \xi)} + x - \cancel{\xi} + \cancel{\xi} \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία A και B αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Σχόλιο για το ΘΕΜΑ Β

Η επιλογή του συγκεκριμένου Β2 δυσκόλεψε πολύ τους μαθητές που είχαν ως προσανατολισμό τις σπουδές οικονομίας και πληροφορικής. Θα μπορούσε να ζητηθεί μελέτη συνάρτησης, εύρεση συνόλου τιμών και κατόπιν πλήθος ριζών εξίσωσης. Είναι ένα ερώτημα που στα πλαίσια του β' θέματος ξεφεύγει από τα βασικά πράγματα που αρκετοί μαθητές με κόπο και τίμια κατάφεραν να μάθουν! Επίσης άστοχο ως ερώτημα κρίνεται και το Β4.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$.

Γ1.

$$D_f = \mathbb{R}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta \mu x) = e^0 \cdot \eta \mu 0 = 1 \cdot 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + x}) = \sqrt{0^2 + 0} = 0$
- $f(0) = 0$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για την παραγωγισιμότητα της f στο $x_0 = 0$, υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \frac{\eta \mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu x}{x} = \\ &= e^0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \cdot (2x + 1)}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}} \cdot (2x + 1) \right] = +\infty, \end{aligned}$$

διότι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x^2 + x}) = 0$ και $2\sqrt{x^2 + x} > 0$ για $x \in (0, 0 + \delta)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1 > 0$.

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Σχόλιο

Η συνάρτηση $\sqrt{x^2 + x}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $(0, 0 + \delta)$.

Διαφορετικά η απροσδιόριστη μορφή του 2ου ορίου θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί και χρησιμοποιώντας «συζυγή παράσταση»:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x \cdot \sqrt{x^2 + x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x \cdot \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x}} \stackrel{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty.\end{aligned}$$

Γ2.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν μπορεί να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Εξετάζουμε αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x).$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|\eta \mu x| \leq 1 \Leftrightarrow |e^x| \cdot |\eta \mu x| \leq |e^x| \Leftrightarrow |e^x \eta \mu x| \leq |e^x| \Leftrightarrow |e^x \eta \mu x| \leq e^x,$$

δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|e^x \eta \mu x| \leq e^x \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x.$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x.$$

Άρα, σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, οπότε η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

- Εξετάζουμε αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έχουμε:



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1} = 1, \text{ άρα } \lambda = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}, \text{ άρα } \kappa = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς η ευθεία $\varepsilon: y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3.

- Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f(x) = e^x \eta \mu x$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}$.

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, καθώς $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$ και προφανώς είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Τότε:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $h(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$
- $h(0) = e^0 \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Δηλαδή ισχύει $h(-\pi)h(0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-\pi, 0)$, τέτοιο, ώστε $h(\xi) = 0$. Άρα η εξίσωση:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-\pi, 0)$ και συνεπώς η C_f τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4.

- Για $x \in [0, +\infty)$ είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$, η οποία είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Για το σημείο $M(x, y)$ που κινείται πάνω στη C_f υπάρχουν οι χρονικές συναρτήσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ και ισχύουν:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x'(t) > 0 \text{ για κάθε } t \geq 0,$$

$$y = \sqrt{x^2 + x}, \text{ και συνεπώς } y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)},$$

οπότε παραγωγίζοντας έχουμε:

$$y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}, \text{ όπου } x(t) > 0 \text{ άρα και } t > 0,$$

με την $x(t)$ να είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, ενώ την $y(t)$ να είναι παραγωγίσιμη για κάθε $t > 0$.

Έστω ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια, ώστε $y'(t_0) = x'(t_0)$. Τότε έχουμε:

$$y'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{x'(t_0)(2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2x(t_0) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\left[2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}\right]^2 = (2x(t_0) + 1)^2 \Leftrightarrow 4(x^2(t_0) + x(t_0)) = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 \Leftrightarrow$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

$$\Leftrightarrow \cancel{4x^2(t_0)} + \cancel{4x(t_0)} = \cancel{4x^2(t_0)} + \cancel{4x(t_0)} + 1 \Leftrightarrow 0 = 1,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια, ώστε ο ρυθμός μεταβολή της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .

Σχόλιο

Και πάλι «μυστήριες» καταστάσεις. Επιλέγεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ η οποία ενώ ορίζεται στο $x_0 = 0$ δεν παραγωγίζεται. Έτσι στην αρχή των χρόνων $t = 0$, το σημείο M είναι στη θέση $(0, 0)$, η τετμημένη του έχει ρυθμό μεταβολής $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$, άρα και $x'(0) > 0$, επομένως στο πρώτο «play» του χρόνου θα μεγαλώσει, όμως για την τεταγμένη ...δεν ξέρουμε! Δηλαδή όλο αυτό μπορεί να μετρηθεί για $t > 0$. Αυτό έπρεπε να είχε ξεκαθαριστεί; Έγινε συνειδητά; Τους ξέφυγε;



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

ΘΕΜΑ Δ

Συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και μια παράγουσα F της f στο $(0, +\infty)$, για τις οποίες ισχύει ότι:

$$xf(x) = 2F(x) \ln x \text{ για κάθε } x > 0 \quad (1)$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x$.

- Θέτοντας $x=1$ στη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$1 \cdot f(1) = 2F(1) \cdot \ln 1 \Leftrightarrow f(1) = 2F(1) \cdot 0 \Leftrightarrow f(1) = 0,$$

άρα το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(1, 0)$.

- Η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, 0)$ είναι ίση με το $f'(1)$ και καθώς είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x$, θα ισχύει $f'(1) = 2$.
- Η F είναι μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$, άρα ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Συνεπώς:

$$F'(1) = f(1) = 0.$$

Επίσης:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ για κάθε } a, b > 0.$$

- Η συνάρτηση $x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και προφανώς συνεχής.

Δ1.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f(x)e^{\ln^2 x} - F(x)e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(e^{\ln^2 x})^2} = \frac{\cancel{e^{\ln^2 x}} \left(f(x) - 2F(x) \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \right)}{(e^{\ln^2 x})^2} = \\ &= \frac{f(x) - 2F(x) \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{e^{\ln^2 x}} = \frac{\frac{xf(x) - 2F(x) \cdot \ln x}{x}}{e^{\ln^2 x}} = \\ &= \frac{xf(x) - 2F(x) \cdot \ln x}{x \cdot e^{\ln^2 x}} \stackrel{(1)}{=} = \frac{0}{x \cdot e^{\ln^2 x}} = 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

Δ2.

i)

Έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$.

- Η συνάρτηση f ως παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ είναι και συνεχής, άρα συνεχής και στο 1, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0.$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) = \ln 1 = 0.$

Συνεπώς το αρχικό όριο οδηγείται σε Απροσδιόριστη Μορφή $\frac{0}{0}$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \ell$$

- $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 2$

- $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$

Τελικά:



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{2}{1} = 2.$$

ii)

Για x κοντά στο 1, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$xf(x) = 2F(x) \ln x \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{f(x)}{\ln x},$$

άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2}x \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right] = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2} = 1.$$

Όμως η συνάρτηση F ως παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ είναι και συνεχής, άρα συνεχής και στο 1, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = F(1) \Leftrightarrow 1 = F(1) \Leftrightarrow F(1) = 1.$$

Σχόλιο

Προφανώς θα ανέβαινε το επίπεδο δυσκολίας στο ερώτημα αυτό, αν ζητούσε να δείξουμε απευθείας ότι ισχύει $F(1) = 1$, χωρίς τη βοήθεια του Δ2 (i).

Στο ερώτημα Δ1 δείξαμε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$, επομένως ισχύει ότι:

$$g(x) = c \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}} = c \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$\frac{F(1)}{e^{\ln^2 1}} = c \Leftrightarrow \frac{1}{e^0} = c \Leftrightarrow c = 1$$

Άρα:

$$\frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Δ3.

Η συνάρτηση $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$F'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = 2e^{\ln^2 x} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}.$$

Το πρόσημο και ο μηδενισμός της $F'(x)$ εξαρτώνται μόνο από την παράσταση:

$$\ln x, \text{ όπου } x > 0,$$

καθώς $2e^{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.

- $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$
- $F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$
- $F'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$.

Το πρόσημο της $F'(x)$ και η μονοτονία της F φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		○	
		-	+
$F(x)$			
		↘	↗
		ολ. min	

Συγκεκριμένα η F είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Στη θέση $x=1$ η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $F(1)=1$, δηλαδή ισχύει:

$$F(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty),$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Έχουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$$

στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x) - F(x^2) = (x-1)^2, \text{ με } x \in (0, +\infty).$$

- Το 1 είναι προφανής λύση της εξίσωσης, καθώς παρατηρούμε ότι για $x=1$ η εξίσωση επαληθεύεται.
- Για κάθε $0 < x < 1$ ισχύει:

$$x^2 < x \stackrel{F1}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x) - F(x^2) < 0,$$

ενώ $(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη για κάθε $x \in (0, 1)$.

- Για κάθε $x > 1$ ισχύει:

$$x^2 > x \stackrel{F1}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x) - F(x^2) < 0,$$

ενώ $(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

άρα η εξίσωση είναι αδύνατη για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Τελικά, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x=1$.

Σχόλιο

2η ιδέα (με «άρωμα» από τη συνάρτηση ολοκλήρωμα...)

- Έστω τυχαίος αριθμός $0 < \kappa < 1$, τότε $\kappa^2 < \kappa$ και για $x = \kappa$ η εξίσωση γίνεται:

$$F(\kappa) - F(\kappa^2) = (\kappa-1)^2 \Leftrightarrow \int_{\kappa^2}^{\kappa} f(x)dx = (\kappa-1)^2.$$

Όμως:



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

$$f(x) = F'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1),$$

άρα, αφού η f είναι και συνεχής στο $[\kappa^2, \kappa]$, θα ισχύει:

$$\int_{\kappa^2}^{\kappa} f(x) dx < 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι:

$$\int_{\kappa^2}^{\kappa} f(x) dx = (\kappa - 1)^2 > 0 \text{ για κάθε } \kappa \in (0, 1).$$

- Όμοια, έστω τυχαίος αριθμός $\kappa > 1$, τότε $\kappa^2 > \kappa$ και για $x = \kappa$ η εξίσωση γίνεται:

$$F(\kappa) - F(\kappa^2) = (\kappa - 1)^2 \Leftrightarrow F(\kappa^2) - F(\kappa) = -(\kappa - 1)^2 \Leftrightarrow \int_{\kappa}^{\kappa^2} f(x) dx = -(\kappa - 1)^2.$$

Όμως:

$$f(x) = F'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty),$$

άρα, αφού η f είναι και συνεχής στο $[\kappa, \kappa^2]$, θα ισχύει:

$$\int_{\kappa}^{\kappa^2} f(x) dx > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, διότι:

$$\int_{\kappa}^{\kappa^2} f(x) dx = -(\kappa - 1)^2 < 0 \text{ για κάθε } \kappa \in (1, +\infty).$$

Συνεπώς και πάλι η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x = 1$.

Δ4.

Είναι $F(x) = x^{\ln x} > 0$ για κάθε $x > 0$. Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$ ως παραγωγίσιμη σε αυτό, οπότε:

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\int_1^e F(x) dx > 2e - 3.$$



σπουδαστήριο

Γ. Κυριακίδης - Ι. Ανδρεάδης

Από εδώ και μετά δεν παραθέτουμε καμία λύση. Αντ' αυτού καταθέτουμε την άποψή μας για ένα άστοχο θέμα.

Ο μαθητής μετά από όλες τις σκέψεις και ό,τι έχει κάνει μέχρι τώρα στα Δ1, Δ2 και Δ3 πρέπει από κάπου να βρει κάποια ανισότητα στην οποία υπακούει η $F(x)$, η συγκεκριμένη $F(x)$, στο συγκεκριμένο ερώτημα Δ4.

Οποιαδήποτε όμως προσπάθεια, σκέψη, ιδέα, συνδυασμός, δεν πετυχαίνει, καθώς το Δ4 στηρίζεται μόνο στη χρήση της «γνωστής» σχέσης $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό κατά τη γνώμη μας θέτει θέμα αδικίας για όλους τους μαθητές που έχουν μάθει να σκέφτονται και όχι να παίζουν ζαριές με «έτοιμες» σχέσεις. Η συγκεκριμένη σχέση μπορεί να είναι γνωστή και να τονίζεται ως άσκηση στο σχολικό βιβλίο για άλλους λόγους, όχι όμως σαν γεννήτρια άλλων σχέσεων. Ακόμη και στο σχολικό βιβλίο σελ. 236 ασκ. 10. (iv) η συγκεκριμένη ανισότητα ΔΙΝΕΤΑΙ ενώ εδώ ΟΧΙ!!!

Πιστεύουμε ότι θα έπρεπε να υπάρχει 2ος τρόπος στηριγμένος σε ότι κάνει η $F(x)$, στο συγκεκριμένο ερώτημα Δ4. Εδώ επιβραβεύεται όποιος, χωρίς να «νιώθει», δοκιμάσει τη σχέση, επειδή μοιάζει η $F(x)$ με $e^x \dots$

Και όπως είπαν μαθητές μας: «όποιος έχει την ανισοτική σχέση

$$e^x \geq x+1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

σαν 1η ιδέα, τότε δεν έχει καμία άλλη ιδέα»...

Καλό καλοκαίρι!

επιμέλεια λύσεων:
Γιάννης Ανδρεάδης
Ηλίας Ντεϊρμεντζίδης